

# **Einführung in die algebraische Topologie für die Architektur**

Patrick Erik Bradley

15. Juni 2005



# Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Motivation	5
1. Wozu Homologie?	5
Kapitel 2. Homologie von Graphen	7
1. Graphen	7
2. Eulercharakteristik	10
3. Kontraktion von Teilbäumen	11
4. Homologie	11
Kapitel 3. Topologie	19
1. Metrische Räume	19
2. Topologie	20
Anhang A. Begriffe aus der linearen Algebra	21
1. Faktormoduln	21



## Motivation

### 1. Wozu Homologie?

Ohne zu definieren, was Homologie oder ihre Schwester Kohomologie sei, wollen wir ein paar beispielhafte Forschungsgebiete nennen, in denen diese mathematischen Theorien eine Rolle spielen. Sie kommen aus der algebraischen Topologie und fanden bald Aufnahme in allen Unterarten der Geometrie. Auch aus Algebra und Zahlentheorie sind die Kohomologietheorien nicht mehr wegzudenken. Dem technischen Fortschritt verdanken sie aber auch in jüngerer Zeit eine wachsende Anwendung in den angewandten technischen Wissenschaften, wie etwa der Volumenkörpermodellierung, Bilderkennung und -verarbeitung, Graphentheorie sowie der Geoinformatik, um nur einige Beispiele zu nennen.

Die Grundidee ist, aus realen Objekten oder aus mathematischen Objekten (wie z.B. Mannigfaltigkeiten) kombinatorische Objekte zu konstruieren, aus denen abelsche Gruppen namens  $H_i$  (Homologien) oder  $H^i$  (Kohomologien) zu gewinnen, mit denen Rückschlüsse auf die ursprünglichen Objekte gezogen werden können. Primäres Ziel ist es dabei nicht, die Objekte exakt zurück zu gewinnen, vielmehr soll eine wesentlich gröbere Struktur wieder erkannt werden, die dann auf eine gewisse Klasse von Objekten schließen lässt. Hilfreich ist dabei oft auch das Zusammenspiel zwischen Homologie und Kohomologie, so genannte *Dualitätssätze*. Später entstanden Kohomologietheorien, die auf andere Weise als mittels kombinatorischer Objekte die  $H^i$  beschreiben, oft auch ohne eine duale Homologietheorie zu haben.

Die Architektur beschreibt oft selbst kombinatorische Objekte relativ direkt. Wichtig ist aber auch die Modellierung von Beziehungen zwischen Objekten, was unweigerlich auf relative Versionen von Homologietheorien, d.h. die Homologie von Abbildungen führt.

Als Erfinder der Homologie gilt Henri Poincaré, der von dieser derart begeistert war, dass er glaubte, mit ihr Mannigfaltigkeiten bis auf Isomorphie „erkennen“ zu können. So gilt etwa für die  $n$ -Sphäre  $S_n$

$$H_i(S_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } i = 0 \\ 0, & \text{falls } i \neq 0 \end{cases}$$

Für kompakte Mannigfaltigkeiten  $X$  der Dimension höchstens  $n = 2$  impliziert auch umgekehrt  $H_i(X) = H_i(S_n)$ , dass  $X$  zu  $S_n$  als Mannigfaltigkeit isomorph ist. Er vermutete, dass jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit  $X$  mit derselben Homologie wie die 3-Sphäre zu ihr isomorph ist, konstruierte jedoch später selbst ein Gegenbeispiel. Dabei erfand er die Idee der Fundamentalgruppe, die hier auch vorkommen soll. Er stellte somit fest, dass er deren Trivialität voraussetzen sollte.

Schließlich lautet die Poincarévermutung:

*Jede kompakte, einfach zusammenhängende  $n$ -Mannigfaltigkeit mit der Homologie einer  $n$ -Sphäre ist zu dieser isomorph.*

Inzwischen ist diese Vermutung für fast alle Dimensionen bewiesen: Für  $n = 0, 1$  ist sie sehr leicht. Im Fall  $n = 2$  war sie schon im 19. Jahrhundert bekannt durch die Klassifikation der kompakten Flächen nach der Anzahl ihrer „Löcher“. Dimension  $n \geq 7$  gelang Smale im Jahr 1961, es folgen  $n = 5$  durch Zeeman (1961) und  $n = 6$  (Stallings, 1962). Mit dem Fall  $n = 4$  im Jahr 1982 verdiente sich Freedman die Fieldsmedaille. Für den noch verbliebenen Fall  $n = 3$  scheint ein ernst zu nehmender Beweis von Perelman aus dem Jahr 2003 vorzuliegen.



# Homologie von Graphen

## 1. Graphen

DEFINITION 2.1. Ein Graph  $\Gamma$  besteht aus Mengen  $V$  (den Ecken) und  $E$  (den Kanten) sowie Abbildungen

$$(1) \quad E \rightarrow V^2, \quad e \mapsto \begin{pmatrix} o(e) \\ t(e) \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad E \rightarrow E, \quad e \mapsto \bar{e}$$

mit den Eigenschaften  $\bar{\bar{e}} = e$ ,  $\bar{e} \neq e$ ,  $o(e) = t(\bar{e})$  für alle  $e \in E$ .

Die Komponente  $o$  der Abbildung (1) wird als *Anfangspunkt* von Kanten angesehen,  $t$  als deren *Endpunkt*. Die Abbildung (2) heißt *Kanteninversion*.

Eine *Orientierung* eines Graph  $\Gamma$  besteht aus einer ausgezeichneten Teilmenge  $E_+$  der Eckenmenge  $E$ , für welche  $E$  die disjunkte Vereinigung von  $E_+$  und allen invertierten Kanten  $\bar{E}_+$ . Ein *orientierter* Graph ist ein Paar  $(\Gamma, E_+)$  mit einem Graph  $\Gamma$  und einer Orientierung  $E_+$ .

Sei  $\Gamma'$  ein weiterer Graph mit Ecken  $V'$ , Kanten  $E'$  mit Anfangspunkten  $o'$  und Endpunkten  $t'$  sowie einer Kanteninversion  $\bar{\phantom{e}}$ .

DEFINITION 2.2. Ein Morphismus von Graphen  $f: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  besteht aus Abbildungen

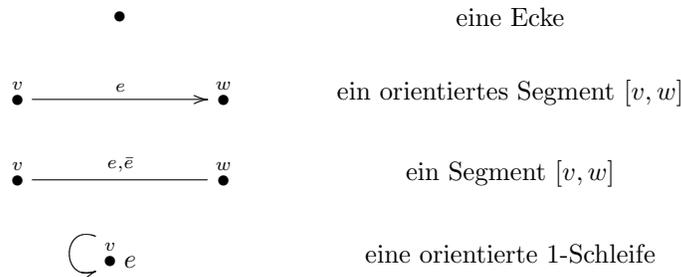
$$f_V: V \rightarrow V', \quad f_E: E \rightarrow E'$$

mit  $f_V(o(e)) = o'(f_E(e))$ ,  $f_V(t(e)) = t'(f_E(e))$  und  $f_E(\bar{e}) = \overline{f_E(e)}$ .

Mit anderen Worten, Graphenmorphismen sollen Kanten auf Kanten, Ecken auf Ecken abbilden und dabei verträglich mit den Anfangs-, Endpunkt und Kanteninversionsabbildungen sein.

Ist für einen Morphismus  $f: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  sowohl  $f_V$  als auch  $f_E$  injektiv, so heißt  $f$  eine *Einbettung*. Sind  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  orientiert und  $f_E(E_+) \subseteq E'_+$ , so heißt  $f$  *orientierungstreu*.

Es ist üblich Graphen auch graphisch darzustellen (daher wohl der Name). So ist etwa



DEFINITION 2.3. Ein (abstrakter) Weg der Länge  $n \geq 0$  ist ein orientierter Graph

$$\text{Weg}_n \quad \bullet \xrightarrow[0,1]{0} \bullet \xrightarrow[1,2]{1} \cdots \xrightarrow[n-1,n]{n-1} \bullet$$

Ein Weg der Länge  $n$  in einem Graph  $\Gamma$  ist ein Morphismus

$$\gamma: \text{Weg}_n \rightarrow \Gamma.$$

Die Ecke  $v_0 := \gamma(0)$  heißt *Anfangspunkt* von  $\gamma$ ,  $v_n := \gamma(n)$  *Endpunkt* von  $\gamma$ , und  $\gamma$  heißt *Weg* von  $v_0$  nach  $v_n$ .

Listen wir im Weg  $\gamma$  die Kanten auf:

$$\gamma: y_1, \dots, y_n$$

mit  $y_i = \gamma([i, i + 1])$ , so kann es sein, dass etwa  $y_{i+1} = \bar{y}_i$  ist, d.h. die Kantenliste so aussieht:

$$\gamma: y_1, \dots, y_i, \bar{y}_i, y_{i+2}, \dots, y_n$$

Dann heißt das Paar  $(y_i, y_{i+1})$  ein *Stachel* im Weg  $\gamma$ .

LEMMA 2.4. *Falls in  $\Gamma$  ein Weg von der Ecke  $v$  in die Ecke  $w$  existiert, so gibt es auch einen stachelfreien Weg von  $v$  nach  $w$ .*

BEWEIS. Kommt im Weg ein Stachel vor, so verkürze den Weg auf die Länge  $n - 2$

$$\gamma': y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n$$

Induktion nach der Anzahl von Stacheln ergibt die Behauptung.  $\square$

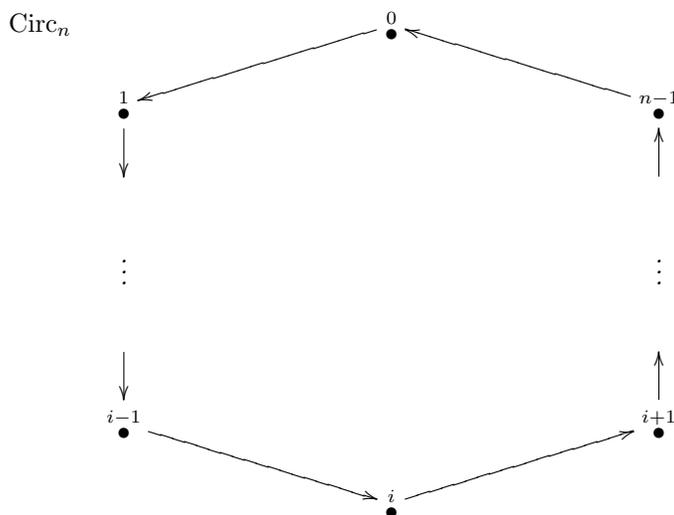
DEFINITION 2.5. *Ist ein Weg eine Einbettung, so heißt er injektiv.*

Wir möchten gerne zeigen:

SATZ 2.6. *Existiert im Graph  $\Gamma$  ein Weg von der Ecke  $v$  zur Ecke  $w$ , so existiert auch ein injektiver Weg von  $v$  nach  $w$ .*

Doch zuvor müssen noch einige Vorbereitungen getroffen werden.

DEFINITION 2.7. *Eine (abstrakte) Schleife der Länge  $n \geq 1$  (oder  $n$ -Schleife) ist ein orientierter Graph*



*Eine  $n$ -Schleife (oder auch Schleife) in einem Graph  $\Gamma$  ist eine Einbettung  $\gamma: \text{Circ}_n \rightarrow \Gamma$ .*

BEMERKUNG 2.8.  *$n$ -Schleifen sind stachelfrei, da es die abstrakte Schleife  $\text{Circ}_n$  ist.*

DEFINITION 2.9. *Ein Baum ist ein nicht leerer, zusammenhängender Graph, in dem es keine Schleifen gibt.*

Ein stachelfreier Weg in einem Baum heißt eine *Geodätische*.

PROPOSITION 2.10. *Zwischen zwei Ecken  $v$  und  $w$  eines Baumes  $T$  existiert genau eine Geodätische. Diese ist injektiv.*

BEWEIS. **Existenz.** Da  $T$  Baum ist, existiert ein Weg von  $v$  nach  $w$ . Nach Lemma 2.4 existiert somit ein stachelfreier Weg von  $v$  nach  $w$ , also eine Geodätische.

**Injektivität.** Sei  $\gamma: \text{Weg}_n \rightarrow T$  eine Geodätische mit  $\gamma(0) = v$  und  $\gamma(n) = w$ . Zu zeigen ist, dass alle  $v_i := \gamma(i)$  verschieden sind. Seien die Kanten des Wegs  $\gamma$  gleich  $y_1, \dots, y_n$ . Sind die Ecken  $v_i$  nicht alle verschieden, so existieren  $i, j$  mit  $j - i > 0$ , sodass  $v_i = v_j$ . Wähle  $i, j$  derart, dass  $j - i$  minimal ist mit der Eigenschaft  $y_i = y_j$ . Dann ist aber  $y_{i+1}, \dots, y_j$  eine Schleife, was in einem Baum nicht möglich ist.

**Eindeutigkeit.** Seien  $y_1, \dots, y_n$  und  $w_1, \dots, w_m$  Geodätische von  $v$  nach  $w$ . Dann ist  $y_n = w_m$ , da sonst  $y_1, \dots, y_n, \bar{w}_m, \dots, \bar{w}_1$  Geodätische von  $v$  nach sich selbst wäre. Somit enden die Wege  $y_1, \dots, y_{n-1}$  und  $w_1, \dots, w_{m-1}$  in derselben Ecke, und vollständige Induktion liefert die Behauptung.  $\square$

DEFINITION 2.11. Ist  $\text{Weg}_n \rightarrow T$  eine Geodätische zwischen Ecken  $v$  und  $w$  eines Baumes, so heisst  $d(v, w) := n$  der Abstand zwischen  $v$  und  $w$ .

BEMERKUNG 2.12. Es gilt  $d(v, w) = 1$  genau dann, wenn  $v$  und  $w$  durch eine Kante verbunden sind. Die Funktion  $d: V(T) \times V(T) \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}$  macht die Eckenmenge  $V(T)$  zu einem metrischen Raum. Zur Erinnerung heisst eine Abbildung  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  Metrik auf der Menge  $X$ , falls sie die Axiome

- (1)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
- (3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (Dreiecksungleichung)

erfüllt. Eine Menge  $X$  mit einer Metrik  $d$  auf  $X$  heisst ein metrischer Raum.

Eine wichtige Grösse in einem Graph  $\Gamma$  ist die Anzahl der in einer Ecke  $v$  eintreffenden Kanten. Die Teilmenge

$$\text{Star}_\Gamma(v) = \{e \in E(\Gamma) \mid v = t(e)\}$$

heisst der *Stern* von  $v$  und ihre Kardinalität

$$n_\Gamma(v) := \#\text{Star}_\Gamma(v)$$

ist der *Index* von  $v$  in  $\Gamma$ . Ist der Index Null, so heisst  $v$  *isolierte* Ecke. Zusammenhängende Graphen besitzen keine isolierten Ecken, wenn sie nicht der Punktgraph  $\bullet$  sind. Eine Ecke  $v$  mit  $n_\Gamma(v) \leq 1$  heisst *Randecke*.

Wird aus einem Graph eine Ecke entfernt, so liegt in der Regel kein Graph mehr vor. Deshalb sei für die Ecke  $v$  in einem Graph  $\Gamma$  der Graph  $\Gamma \setminus v$  folgendermaßen definiert:

$$V(\Gamma \setminus v) := V(\Gamma) \setminus \{v\}, \quad E(\Gamma \setminus v) := E(\Gamma) \setminus \left( \text{Star}_\Gamma(v) \cup \overline{\text{Star}_\Gamma(v)} \right),$$

d.h. es werden mit  $v$  alle ein- und ausgehenden Kanten entfernt.

LEMMA 2.13. Ist  $v$  nicht isolierte Randecke eines Graphen  $\Gamma$ , dann gilt:

- (1)  $\Gamma$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $\Gamma \setminus v$  zusammenhängend ist.
- (2) Jede Schleife in  $\Gamma$  verläuft in  $\Gamma \setminus v$ .
- (3) Genau dann ist  $\Gamma$  ein Baum, wenn  $\Gamma \setminus v$  ein Baum ist.

BEWEIS. (1) ist klar.

(2) Ist  $w$  eine Ecke auf einer Schleife in  $\Gamma$ , so ist  $n_\Gamma(w)$  mindestens 2,  $w$  also eine Ecke von  $\Gamma \setminus v$ .

(3) folgt aus (1) und (2). □

Die Menge  $\mathcal{T}$  aller Teilbäume eines nicht leeren Graphen  $\Gamma$  ist durch Inklusion geordnet und jede Kette (d.h. total geordnete Teilmenge)  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{T}$  hat eine obere Schranke in  $\mathcal{T}$ : es ist nämlich

$$T_\infty := \bigcup_{T \in \mathcal{C}} T$$

ebenfalls ein Teilbaum von  $\Gamma$ . Das Lemma von Zorn besagt, dass dann  $\mathcal{T}$  ein maximales Element hat, mit anderen Worten:  $\Gamma$  hat mindestens einen maximalen Teilbaum.

PROPOSITION 2.14. Sei  $T$  ein maximaler Teilbaum eines nicht leeren zusammenhängenden Graphen  $\Gamma$ . Dann enthält  $T$  alle Ecken von  $\Gamma$ .

BEWEIS. Im anderen Fall gäbe es eine Kante  $e$  mit Anfangspunkt in  $T$ , dessen Endpunkt  $v$  aber außerhalb  $T$  wäre. Dann wäre jedoch der Teilgraph  $T_v$  von  $\Gamma$  mit Eckenmenge  $V(T) \cup \{v\}$  und Kantenmenge  $E(T) \cup \{e, \bar{e}\}$  nach Lemma 2.13 (3) ein Baum, der  $T$  als echten Teilbaum enthält. Widerspruch. □

Nun sind wir so weit:

BEWEIS VON SATZ 2.6. Sei  $\gamma$  ein Weg in  $\Gamma$  von  $v$  nach  $w$ . Nach Lemma 2.4 können wir annehmen, dass er stachelfrei sei. Sei  $T$  ein maximaler Teilbaum von  $\gamma(\text{Weg}_n)$ . Nach Proposition 2.10 existiert in  $T$  eine Geodätische von  $v$  nach  $w$ , die injektiv ist. □

## 2. Eulercharakteristik

DEFINITION 2.15. Sei  $\Gamma$  ein Graph. Ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von  $\Gamma$  heißt eine Zusammenhangskomponente von  $\Gamma$ .

PROPOSITION 2.16. Sei  $\Gamma$  ein endlicher Graph, d.h. seine Eckenzahl  $s$  sei endlich. Mit  $a := \frac{1}{2} \#E(\Gamma)$  gilt:

- (1)  $a \geq s - 1$
- (2) Genau dann ist  $a = s - 1$ , wenn  $\Gamma$  ein Baum ist.

BEWEIS. (i) Sei  $\Gamma$  ein Baum. Ist  $\Gamma = \bullet$ , so ist  $a = s - 1$  leicht einzusehen. Dies war der Induktionsanfang. Gelte  $a = s - 1$  für Bäume  $T$  mit  $n$  Ecken und sei  $T_e$  der Baum

$$T \xrightarrow{e} \bullet$$

mit  $s(T_e) = n + 1$  Ecken. Seine Kantenzahl ist

$$a(T_e) = a(T) + 1 = (n - 1) + 1 = n = s(T_e) - 1.$$

Dies war der Induktionsschritt. Die Implikation  $\Leftarrow$  von (2) gilt also.

(ii) Sei  $\Gamma = \emptyset$  der leere Graph. Wegen  $0 \geq -1$  und da er kein Baum ist, gilt (1) und die Implikation  $\Rightarrow$  von (2) für diesen Fall.

(iii) Sei  $\Gamma \neq \emptyset$  und  $T$  ein maximaler Teilbaum, der nach dem vorangegangenen Abschnitt existiert. Dessen Eckenzahl  $s(T)$  stimmt mit  $s$  nach Proposition 2.14 überein. Weiter gilt für die Kantenzahl  $a(T)$  des Baums  $T$ :  $a \geq a(T)$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $\Gamma = T$ . Also:

$$a = a - a(T) + a(T) = a - a(T) + s - 1 \geq s - 1,$$

und es folgt (1) und (2). □

BEMERKUNG 2.17. (1) Die Größe  $a = a(\Gamma)$  ist die Zahl der geometrischen Kanten, d.h. der Kanten einer geometrischen Realisierung des Graphen  $\Gamma$ .

(2) Definieren wir für einen zusammenhängenden endlichen Graph  $\Gamma$  und einen maximalen Teilbaum  $T$  von  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} b_0(\Gamma) &:= 1 \\ b_1(\Gamma) &:= a(\Gamma) - a(T), \end{aligned}$$

so sahen wir im Beweis von Proposition 2.16  $a(\Gamma) = b_1 + s - 1$ , d.h.

$$s(\Gamma) - a(\Gamma) = b_0 - b_1.$$

Dies ist ein Spezialfall der Euler-Poincaré-Formel. Setzen wir allgemein für einen endlichen Graph  $\Gamma$  mit  $n$  Zusammenhangskomponenten  $\Gamma_i$

$$b_i := \begin{cases} n, & \text{falls } i = 0 \\ \sum_{i=1}^n b_i(\Gamma_i), & \text{falls } i = 1 \\ 0, & \text{falls } i > 1 \end{cases}$$

so erhalten wir eine etwas allgemeinere Variante der Euler-Poincaré-Formel

$$s(\Gamma) - a(\Gamma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i$$

DEFINITION 2.18. Die natürliche Zahl  $\chi(\Gamma) := \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i$  heißt die Eulercharakteristik von  $\Gamma$ , und die Zahl  $b_i$  heißt die  $i$ -te Bettizahl.

SATZ 2.19. Sei  $\Gamma$  ein nicht leerer endlicher Graph. Genau dann ist  $\Gamma$  ein Baum, wenn für seine Bettizahlen gilt:  $b_0 = 1$  und  $b_1 = 0$ . Äquivalent hierzu ist  $\chi(\Gamma) > 0$  und  $b_0 = 1$ .

BEWEIS. Ist  $\Gamma$  ein Baum, so folgt nach Definition der Bettizahlen  $b_0 = 1$  und  $b_1 = 0$ . Ist umgekehrt  $b_0 = 1$  und  $b_1 = 0$ , so folgt aus der Euler-Poincaré-Formel

$$a(\Gamma) = s(\Gamma) - \chi(\Gamma) = s(\Gamma) - 1.$$

Nach Proposition 2.16 ist  $\Gamma$  also ein Baum. Die zweite Äquivalenz ist nicht sonderlich schwer einzusehen. □

### 3. Kontraktion von Teilbäumen

DEFINITION 2.20. Ein Graph, der disjunkte Vereinigung von Bäumen ist, heißt ein Wald.

Sei  $\Gamma$  ein nicht leerer Graph. Weiter sei  $W = \bigcup_{i \in I} T_i$  ein Teilwald von  $\Gamma$ , bei dem die  $T_i$  Bäume seien. Wir definieren einen neuen Graph  $\Gamma/W$  folgendermaßen:

Die Ecken  $V(\Gamma/W)$  seien die Klassen von  $V(\Gamma)$  unter der Äquivalenzrelation  $\sim$ , wobei

$$v \sim w \Leftrightarrow v = w \text{ oder } v, w \in T_i \text{ für ein } i \in I.$$

Es ist leicht einzusehen, dass  $\sim$  tatsächlich die Axiome einer Äquivalenzrelation erfüllt.

Die Kantenmenge ist definiert als  $E(\Gamma/W) = E(\Gamma) \setminus E(W)$ .

Als Kanteninvolution nehmen wir die Restriktion der Kanteninvolution von  $\Gamma$  auf  $E(\Gamma/W)$ .

Anfangspunkt und Endpunkt sei die Abbildung auf die Klasse der Anfangs- bzw. Endpunkte:

$$E(\Gamma/W) \rightarrow V(\Gamma/W)^2, \quad e \mapsto \begin{pmatrix} [o(e)] \\ [t(e)] \end{pmatrix}.$$

Dass dies tatsächlich die Axiome eines Graphen erfüllt, ist nicht sonderlich schwer einzusehen.

SATZ 2.21. Sei  $\Gamma \neq \emptyset$  endlicher Graph und  $W = \bigcup_{i=1}^n T_i$  ein Teilwald mit Bäumen  $T_i \subseteq \Gamma$ . Dann ist für alle  $i = 1, \dots, n$

$$b_i(\Gamma/W) = b_i(\Gamma).$$

BEWEIS. Für  $i > 1$  ist bei Graphen nichts zu zeigen.

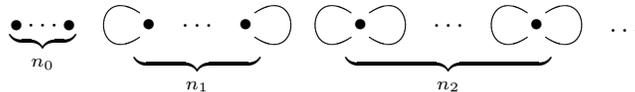
$i = 0$ . Sei  $\gamma: y_1, \dots, y_m$  ein Weg von  $v$  nach  $w$  in  $\Gamma$ . Dann ist  $\bar{\gamma}$ , definiert durch die Kanten von  $\gamma$ , die nicht im Wald  $W$  liegen ein Weg von  $[v]$  nach  $[w]$ . Dies bedeutet, dass  $b_0(\Gamma/W) = b_0(\Gamma)$  ist.

Nach der Euler-Poincaré-Formel ist  $b_1(\Gamma/W) = b_0(\Gamma/W) + \chi(\Gamma/W)$ . Nun gilt für die Eulercharakteristik

$$\begin{aligned} \chi(\Gamma/W) &= s(\Gamma/W) - a(\Gamma/W) = (s(\Gamma) - s(W) + n) - (a(\Gamma) - a(W)) \\ &= (s(\Gamma) - s(W) + n) - \left( a(\Gamma) - \sum_{i=1}^n (s(T_i) - 1) \right) \\ &= (s(\Gamma) - s(W) + n) - (a(\Gamma) - s(W) + n) \\ &= s(\Gamma) - a(\Gamma) = \chi(\Gamma) \end{aligned}$$

Da nach dem Fall  $i = 0$  ja  $b_0(\Gamma/W) = b_0(\Gamma)$  ist, folgt dass die ersten Bettizahlen ebenfalls übereinstimmen.  $\square$

BEMERKUNG 2.22. (1) Ist  $W$  ein maximaler Teilwald von  $\Gamma$ , so ist  $b_0$  gleich der Eckenzahl von  $\Gamma/W$ . Dieser Graph besteht also aus  $n_0$  Punktgraphen  $\bullet$ ,  $n_1$  Ecken mit je einer 1-Schleife,  $n_2$  Ecken mit je zwei 1-Schleifen,  $\dots$ ,  $n_m$  Ecken mit je  $m$  1-Schleifen, sodass  $n_1 + \dots + n_m = b_0$  gilt:



Wir erkennen somit, dass  $b_1$  die Anzahl der Schleifen in  $\Gamma/W$  bzw.  $\Gamma$  ist.

(2) Ist  $b_0$  gegeben, so ist auch  $b_1 = b_0 - \chi$  sofort gegeben, da sich  $\chi = s - a$  durch einfache Kardinalitätsberechnungen gewinnen lässt.

### 4. Homologie

Homologie ist eine algebraische Beschreibung eines mathematischen Objekts. Die Einführung von Algebra erreichen wir, indem wir aus den Bausteinen unserer Objekte Funktionen mit ganzzahligen Werten machen. Sei dazu  $M$  eine Menge. Jedem Element  $m \in M$  ordnen wir die Funktion

$$\varepsilon_m: M \rightarrow \mathbb{Z}, \quad m' \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } m = m' \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

zu. Bezeichnen wir die Menge aller ganzzahligen Funktionen auf  $M$  mit  $\mathbb{Z}^M$ , so bekommen wir eine injektive Abbildung

$$M \rightarrow \mathbb{Z}^M, \quad m \mapsto \varepsilon_m,$$

die uns erlaubt, später statt  $\varepsilon_m$  wieder  $m$  zu schreiben. Mit diesen Funktionen kann gerechnet werden: Addition und Subtraktion von Funktionen  $f, g \in \mathbb{Z}^M$  geschieht punktweise:

$$f \pm g(m) := f(m) \pm g(m).$$

Die Gesamtheit aller Funktionen, die sich so aus den  $\varepsilon_m$  für die  $m \in M$  gewinnen lassen, haben alle nur an endlich vielen Stellen in  $M$  einen von Null verschiedenen Wert und wird deshalb mit  $\mathbb{Z}_{\text{fin}}^M$  bezeichnet:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{\text{fin}}^M &:= \{f \in \mathbb{Z}^M \mid f(m) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } m \in M\} \\ &= \{f \in \mathbb{Z}^M \mid f = \alpha_1 \varepsilon_{m_1} + \dots + \alpha_n \varepsilon_{m_n}, \alpha_i \in \mathbb{Z}, m_i \in M, i = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Da zudem  $0 \in \mathbb{Z}_{\text{fin}}^M$  und die Addition von ganzzahlwertigen Funktionen kommutativ ist:

$$f + g = g + f \quad \text{für } f, g \in \mathbb{Z}_{\text{fin}}^M,$$

ist  $\mathbb{Z}_{\text{fin}}^M$  eine abelsche Gruppe und heißt *die von  $M$  erzeugte freie abelsche Gruppe* oder auch: *der von  $M$  erzeugte freie  $\mathbb{Z}$ -Modul*.

Unsere Definition von Graph erlaubt, dass jeder Graph orientierbar ist. Daher definieren wir:

DEFINITION 2.23. Sei  $(\Gamma, E_+)$  ein orientierter Graph. Dann heißen die Elemente der abelschen Gruppen

$$C_0(\Gamma) := \mathbb{Z}_{\text{fin}}^V \quad \text{bzw.} \quad C_1(\Gamma) := \mathbb{Z}_{\text{fin}}^{E_+}$$

0-Ketten bzw. 1-Ketten.

Auch aus den invertierten Kanten von  $\bar{E}_+$  wollen wir 1-Ketten bilden. Hierzu vereinbaren wir

$$\iota: \bar{E}_+ \rightarrow C_1, \quad \bar{e} \mapsto -e,$$

wobei wir uns schon auf die Vereinbarung berufen, statt  $\varepsilon_e$  bzw.  $\varepsilon_v$  einfach  $e$  bzw.  $v$  zu schreiben. Schließlich setzen wir noch

$$C_i(\Gamma) := 0 \quad (i \in \{-1, 2, 3, \dots\}),$$

die abelsche Gruppe, die nur aus der Null besteht.

DEFINITION 2.24. Die Randoperatoren des orientierten Graphen  $(\Gamma, E_+)$  sind die  $\mathbb{Z}$ -linearen Abbildungen

$$\partial_i: C_i \rightarrow C_{i-1}, \quad x \mapsto \begin{cases} t(e) - o(e), & i = 1 \text{ (und } x = e \in E_+) \\ 0, & i \neq 1. \end{cases}$$

Beachte, dass  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildungen zwischen abelschen Gruppen durch die Bilder ihrer Erzeugendensysteme gegeben sind via

$$\partial_i \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_i(x_i).$$

LEMMA 2.25. Es ist  $\partial_i \circ \partial_{i-1} = 0$  für alle  $i > 0$ . Oder kurz:  $\partial \circ \partial = 0$ .

BEWEIS. Für  $i \neq 1$  ist  $\partial_i$  die Nullabbildung. Damit ist  $\partial_{i-1}(\partial_i(x)) = \partial_{i-1}(0) = 0$  für jedes  $x \in C_i(\Gamma)$ . Zum Fall  $i = 1$ : da  $\partial_0$  die Nullabbildung ist, gilt auch  $\partial_0(\partial_1(x)) = 0$  für jedes  $x \in C_1(\Gamma)$ .  $\square$

DEFINITION 2.26. Die Sequenz von Abbildungen

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(\Gamma) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(\Gamma) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Gamma) \xrightarrow{\partial_0} C_{-1}$$

heißt der Komplex  $C_\bullet(\Gamma)$  von  $\Gamma$ .

BEMERKUNG 2.27. Der Komplex von  $\Gamma$  könnte auch nach rechts durch unendlich viele Nullen fortgesetzt werden. Allgemein heißt eine Sequenz von abelschen Gruppen mit  $\mathbb{Z}$ -linearen Abbildungen

$$\dots \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots$$

ein Komplex, wenn stets  $\partial \circ \partial = 0$  (mit den jeweils zusammen passenden Randoperatoren  $\partial$ ) gilt. Für den obigen Komplex schreiben wir kurz  $C_\bullet$ .

Ist  $f: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  ein Morphismus von Graphen, so werden  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildungen

$$f_i: C_i(\Gamma) \rightarrow C_i(\Gamma')$$

folgendermaßen induziert:  $f$  bildet Ecken auf Ecken und Kanten auf Kanten ab. Wähle nun eine Orientierung  $E_+(\Gamma)$ . Auf  $\Gamma'$  wählen wir irgendeine Orientierung  $E_+(\Gamma')$ , die  $f(E_+(\Gamma))$  als Teilmenge enthält. Weiter vereinbaren wir: sind  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  orientiert, so sei  $f$  orientierungserhaltend.

PROPOSITION 2.28. *Sei  $f: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  ein Graphenmorphimus. Dann kommutieren die Quadrate*

$$\begin{array}{ccc} C_i(\Gamma) & \xrightarrow{\partial_i} & C_{i-1}(\Gamma) \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_{i-1} \\ C_i(\Gamma') & \xrightarrow{\partial_i} & C_{i-1}(\Gamma') \end{array}$$

für alle  $i > 0$ .

BEWEIS. Zu beweisen ist etwas nur für den Fall  $i = 1$ . Wegen der Linearität der Abbildungen, genügt es, eine Kante  $e \in E(\Gamma)$  zu betrachten. Sei  $f(e) = e' \in E(\Gamma')$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \partial_1(f_1(e)) &= t(e') - o(e') \\ f_0(\partial_1(e)) &= f_0(t(e) - o(e)) = f(t(e)) - f(o(e)) = t(e') - o(e'). \end{aligned}$$

Letztere Gleichheit gilt, da  $f$  ein Morphismus von Graphen ist. □

BEMERKUNG 2.29. *Auf dem Niveau von Komplexen haben wir also folgendes Diagramm:*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(\Gamma) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(\Gamma) & \xrightarrow{\partial_0} & 0 \\ & & f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(\Gamma') & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(\Gamma') & \xrightarrow{\partial_0} & 0 \end{array}$$

bei dem alle Pfeile  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildungen sind und alle Quadrate kommutieren. So etwas heißt ein Morphismus von Komplexen. Kurz schreiben wir dafür:

$$f_\bullet: C_\bullet(\Gamma) \rightarrow C_\bullet(\Gamma').$$

KOROLLAR 2.30. *Ein Graphenmorphimus  $f: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  induziert einen Morphismus  $f_\bullet: C_\bullet(\Gamma) \rightarrow C_\bullet(\Gamma')$  der zugehörigen Komplexe.*

BEWEIS. Genau dies wurde in Bemerkung 2.29 gezeigt. □

LEMMA 2.31. *Ist  $f: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  eine Einbettung von Graphen, dann sind die zugehörigen  $f_i: C_i(\Gamma) \rightarrow C_i(\Gamma')$  injektiv.*

BEWEIS. Für  $i \neq 0, 1$  ist die Injektivität klar. Da  $f$  auf den Ecken- und Kantenmengen jeweils injektiv ist, sind die induzierten linearen Abbildungen zwischen den von ihnen erzeugten freien  $\mathbb{Z}$ -Moduln injektiv. □

BEMERKUNG 2.32. *Wegen Lemma 2.31 nennen wir den induzierten Morphismus von Komplexen  $f_\bullet: C_\bullet(\Gamma) \rightarrow C_\bullet(\Gamma')$  injektiv oder eine Einbettung von Komplexen.*

Nicht jeder Morphismus von Graphen zugehörigen Komplexen kommt von einem Graphenmorphimus. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist die Kontraktion von Bäumen. Sei dazu  $\Gamma$  ein Graph und  $W$  ein Teilwald von  $\Gamma$ . Hier induziert Kontraktion im Allgemeinen keinen Graphenmorphimus  $\Gamma \rightarrow \Gamma/W$ , da jede Kante von  $W$  auf eine Ecke abgebildet werden müsste. Dennoch haben wir surjektive Abbildungen (durch lineare Fortsetzung auf den erzeugenden Mengen definiert)

$$\begin{aligned} \omega_1: C_1(\Gamma) &\rightarrow C_1(\Gamma/W), & e &\mapsto \begin{cases} e, & \text{falls } e \in E_+(\Gamma) \setminus E_+(W) \\ 0, & \text{falls } e \in E_+(W) \end{cases} \\ \omega_0: C_0(\Gamma) &\rightarrow C_0(\Gamma/W), & v &\mapsto [v] \\ \omega_i: C_i(\Gamma) &\rightarrow C_i(\Gamma/W), & 0 &\mapsto 0 \quad (i = -1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.33. Ist  $\Gamma$  ein Graph und  $W \subseteq \Gamma$  ein Wald, so wird durch die  $\omega_i, i \geq -1$ , ein Morphismus von Komplexen

$$\omega_\bullet: C_\bullet(\Gamma) \rightarrow C_\bullet(\Gamma/W)$$

definiert.

BEWEIS. Wir müssen uns nur von der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} C_1(\Gamma) & \xrightarrow{\omega_1} & C_1(\Gamma/W) \\ \partial_1 \downarrow & & \downarrow \partial_1 \\ C_0(\Gamma) & \xrightarrow{\omega_0} & C_0(\Gamma/W) \end{array}$$

überzeugen. Sei dazu  $e \in E_+(\Gamma)$ . Wir behandeln die beiden Fälle  $e \in W$  und  $e \notin W$  separat. Sei zunächst  $e$  eine Kante außerhalb des Waldes  $W$ . Dann ist

$$\partial_1(\omega_1(e)) = \partial_1(e) = [t(e)] - [o(e)] = \omega_0(t(e)) - \omega_0(o(e)) = \omega_0(t(e) - o(e)) = \omega_0(\partial_1(e)).$$

Sei nun  $e$  im Wald  $W$ . Dann ist  $\omega_1(e) = 0$  und somit  $\partial_1(\omega_1(e)) = 0$ . Nun ist  $\omega_0(\partial_1(e)) = [t(e)] - [o(e)]$ . Da aber  $e$  in einer Zusammenhangskomponente  $T$  (ein Baum) von  $W$  liegt, müssen auch  $o(e)$  und  $t(e)$  Ecken desselben Baums  $T$  sein. Dann ist nach Kontraktion aber  $[t(e)] = [o(e)]$  dieselbe Ecke von  $\Gamma/W$ . Dies zeigt die Kommutativität des Diagramms.  $\square$

BEMERKUNG 2.34. Sind bei einem Morphismus  $f_\bullet: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$  alle  $f_i: C_i \rightarrow C'_i$  surjektiv, nennen wir auch den Morphismus  $f$  von Komplexen surjektiv. Der von der Kontraktion eines Teilwaldes induzierte Morphismus von Komplexen  $\omega_\bullet: C_\bullet(\Gamma) \rightarrow C_\bullet(\Gamma/W)$  ist nach Konstruktion also surjektiv.

Bei der Kontraktion eines Teilwaldes  $W$  in einem Graph  $\Gamma$  bekommen wir also eine Sequenz von Morphismen

$$(3) \quad C_\bullet(W) \xrightarrow{\iota_\bullet} C_\bullet(\Gamma) \xrightarrow{\omega_\bullet} C_\bullet(\Gamma/W)$$

wobei  $\iota_\bullet$  der von der Inklusion  $\iota: W \rightarrow \Gamma$  induzierte Morphismus der zugehörigen Komplexe ist. Wir können uns fragen, ob dies ein Komplex von Komplexen ist: aber „ $\omega_\bullet \circ \iota_\bullet = 0$ “ macht so direkt nicht Sinn — jedoch auf dem Niveau von Ketten!

DEFINITION 2.35. Eine Sequenz

$$(4) \quad \dots \longrightarrow C_\bullet^{(n+1)} \xrightarrow{\alpha_\bullet^{(n+1)}} C_\bullet^{(n)} \xrightarrow{\alpha_\bullet^{(n)}} C_\bullet^{(n-1)} \longrightarrow \dots$$

von Komplexen heißt ein Komplex (von Komplexen), wenn für alle  $n$  und alle  $i$  gilt

$$\alpha_i^{(n)} \circ \alpha_i^{(n+1)} = 0.$$

Eine Sequenz (4) heißt exakt an der Stelle  $n$ , wenn die Sequenz ein Komplex ist und für alle  $i$  zudem gilt:

$$\ker \alpha_i^{(n)} = \text{im } \alpha_i^{(n+1)}.$$

Dabei ist für  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildungen  $\varphi: M \rightarrow N$  zwischen  $\mathbb{Z}$ -Moduln  $M$  und  $N$

$$\ker \varphi := \{x \in M \mid \varphi(x) = 0\}$$

der Kern von  $\varphi$  und

$$\text{im } \varphi := \varphi(M)$$

das Bild von  $\varphi$ . Schließlich heißt die Sequenz exakt, wenn sie an jeder Stelle exakt ist.

BEMERKUNG 2.36. Dass eine exakte Sequenz ein Spezialfall eines Komplexes ist, erkennen wir daran, dass für lineare Abbildungen  $\alpha: M \rightarrow N$  und  $\beta: N \rightarrow P$  die Bedingung  $\beta \circ \alpha = 0$  äquivalent ist zu

$$\text{im } \alpha \subseteq \ker \beta.$$

Beliebt sind exakte Sequenzen der Gestalt

$$(5) \quad 0 \xrightarrow{\alpha} M' \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{\gamma} M'' \xrightarrow{\delta} 0,$$

die kurze exakte Sequenz. Hier ist die Exaktheit gleichbedeutend damit, dass  $M' \rightarrow M$  injektiv,  $M \rightarrow M''$  surjektiv und die Sequenz in der Mitte exakt ist: Die Sequenz ist genau dann an der Stelle  $M'$  exakt, wenn  $\ker \beta = \text{im } \alpha = 0$ , d.h. wenn  $\beta$  injektiv ist. Exaktheit an der Stelle  $M''$  ist gleichbedeutend damit, dass  $\text{im } \gamma = \ker \delta = M$  ist, also  $\gamma$  surjektiv.

Exaktheit der kurzen exakten Sequenz (5) bedeutet an der Stelle  $M$  nichts anderes als  $\ker \gamma = \text{im } \beta \cong M'$ , wobei für die letzte Isomorphie die Injektivität von  $\beta$  benutzt wurde. Nach dem Homomorphiesatz aus der linearen Algebra gilt in jedem Falle

$$\text{im } \beta \cong M / \ker \beta.$$

Damit gilt die Isomorphie  $M'' \cong M/M'$  genau dann, wenn die Sequenz außer in  $M'$  und in  $M''$  auch in  $M$  exakt ist. Für die Definition der Faktormoduln  $M/M'$ , wenn  $M'$  ein Untermodul von  $M$  ist, verweisen wir auf Definition A.1.

Leider ist die bei der Kontraktion eines Teilwaldes erhaltene Sequenz (3) kein Komplex! Beispielsweise bekommen wir für die 1-Schleife  $\bigcirc \bullet$  auf dem Niveau der Ecken eine Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

für welche  $\alpha$  und  $\beta$  injektiv, und damit  $\text{im } \alpha \not\subseteq \ker \beta$ , d.h.  $\beta \circ \alpha \neq 0$  ist.

Das Problem liegt nämlich darin, dass bei Kontraktion nicht alle Ecken des Waldes verschwinden. Die exakte Sequenz

$$C_\bullet(\Gamma) \xrightarrow{\omega_\bullet} C_\bullet(\Gamma/W) \longrightarrow 0$$

lässt sich jedoch immer zu einer kurzen exakten Sequenz

$$(6) \quad 0 \longrightarrow K_\bullet(W) \xrightarrow{\alpha_\bullet} C_\bullet(\Gamma) \xrightarrow{\omega_\bullet} C_\bullet(\Gamma/W) \longrightarrow 0$$

ergänzen. Der Komplex  $K_\bullet(W)$  ist dabei definiert durch

$$\begin{aligned} K_1(W) &:= C_1(W) = \ker \omega_1 \subseteq C_1(\Gamma) \\ K_0(W) &:= \ker \omega_0 \subseteq C_0(W) \\ K_i(W) &:= 0 \quad \text{für } i = -1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

und Randoperatoren

$$\begin{aligned} \partial_1: K_1(W) &\rightarrow K_0(W), \quad e \mapsto t(e) - o(e) \quad (e \in E_+(W)), \\ \partial_i &:= 0 \quad \text{für } i = 0, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.37. *Die Sequenz (6) ist exakt.*

BEWEIS. Die  $\alpha_n$  sind injektive  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildungen. Es ist  $\alpha_\bullet$  ein Morphismus von Komplexen, da die Randabbildung  $K_n(W) \rightarrow C_{n-1}(W)$  gerade die Restriktion der Randabbildung  $C_n(\Gamma) \rightarrow C_{n-1}(\Gamma)$  ist. Dass  $\omega_\bullet$  surjektiv ist, wurde schon gezeigt. Exaktheit in der Mitte gilt auf Grund der Definition von  $K_\bullet(W)$  und  $\alpha_\bullet$ .  $\square$

Nun kommen wir zur Definition von Homologie.

DEFINITION 2.38. *Sei  $C_\bullet$  ein Komplex von  $\mathbb{Z}$ -Moduln:*

$$\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots$$

Dann heißt

$$H_i(C_\bullet, \mathbb{Z}) := \ker \partial_i / \text{im } \partial_{i+1}$$

die  $i$ -te Homologiegruppe von  $C_\bullet$  mit Werten in  $\mathbb{Z}$ . Die Elemente von  $Z_i(C_\bullet, \mathbb{Z}) := \ker \partial_i$  heißen  $i$ -Zykeln, und die Elemente von  $B_i(C_\bullet, \mathbb{Z}) := \text{im } \partial_{i+1}$  heißen  $i$ -Ränder.

Ist  $C_\bullet = C_\bullet(\Gamma)$  der Komplex eines Graphen  $\Gamma$ , so heißt

$$H_i(\Gamma, \mathbb{Z}) := H_i(C_\bullet, \mathbb{Z})$$

die  $i$ -te Homologiegruppe von  $\Gamma$ .

Wenn nichts anderes gesagt wird, betrachten wir stets Homologie mit Werten in  $\mathbb{Z}$  und schreiben daher  $H_i(C_\bullet)$  statt  $H_i(C_\bullet, \mathbb{Z})$ .

LEMMA 2.39. *Sei  $K_\bullet(W)$  der Komplex aus Proposition 2.37. Dann ist  $H_i(K_\bullet(W)) = 0$  für alle  $i \geq 0$ .*

BEWEIS. Da  $\partial_2 = 0$  ist, folgt

$$H_1(K_\bullet(W)) = \ker \partial_1 = 0.$$

Letztere Gleichheit gilt, da  $W$  ein Wald ist: dann ist nämlich stets  $o(e) \neq t(e)$  für alle Kanten  $e \in E_+(W)$ .

Weiter ist

$$H_0(K_\bullet(W)) = \ker \omega_0 / \text{im } \partial_1 = 0,$$

da  $\partial_1: C_1(W) \rightarrow \ker \omega_0$  surjektiv ist: Sei zunächst  $T \subseteq W$  eine Zusammenhangskomponente in  $W$ . Nun ist  $\omega_0$  auf den Ecken von  $T$  konstant, etwa  $\omega_0|_{V(T)} = [v]$  für die Ecke  $v$  von  $T$ . Somit ist

$$\{v' - v \mid v' \in V(T)\}$$

eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\ker \omega_0|_{C_0(T)}$ . Ist nun durch die Kantenfolge  $e_1, \dots, e_m$  eine Geodätische von  $v'$  nach  $v$  gegeben, so ergibt sich

$$v' - v = \pm(t(e_1) - o(e_1)) \pm \dots \pm (t(e_m) - o(e_m)) \in \text{im } \partial_1$$

(das jeweilige Vorzeichen ergibt sich durch die Orientierung der jeweiligen Kante). Da  $T$  eine beliebige Zusammenhangskomponente des Waldes  $W$  war, folgt

$$\ker \omega_0 = \bigoplus_{T \text{ Komponente von } W} \ker \omega_0|_{C_0(T)} \subseteq \partial_1.$$

Die Inklusion  $\supseteq$  gilt sowieso, daher ist  $\partial_1$  surjektiv.

Die höheren Homologiegruppen verschwinden ohnehin. □

LEMMA 2.40. Ein Morphismus  $\alpha_\bullet: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$  von Komplexen induziert  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildungen

$$H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$$

zwischen den zugehörigen Homologiegruppen.

BEWEIS. Nehmen wir uns zwei adjazente kommutierende Quadrate vor:

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ \alpha_{n+1} \downarrow & & \alpha_n \downarrow & & \downarrow \alpha_{n-1} \\ C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} \end{array}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} x \in \ker \partial_n &\implies \partial'_n \alpha_n(x) = \alpha_{n-1} \partial_n(x) = 0 \implies \alpha_n(x) \in \ker \partial'_n \\ y = \partial_{n+1}(x) \in \text{im } \partial_{n+1} &\implies \alpha_n(y) = \alpha_n(\partial_{n+1}(x)) = \partial_{n+1} \alpha_{n+1}(x) \implies \alpha_n(y) \in \text{im } \partial'_{n+1} \end{aligned}$$

Durch Restriktion werden von  $\alpha_n$  also Abbildungen

$$\ker \partial_n \rightarrow \ker \partial'_n \quad \text{und} \quad \text{im } \partial_{n+1} \rightarrow \text{im } \partial'_{n+1}$$

induziert. Dies ergibt nach Lemma A.3 eine lineare Abbildung

$$H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . □

Nun können wir die Erhaltung der Homologie nach Kontraktion zeigen. Allerdings verwenden wir dafür ein Hilfsmittel der homologischen Algebra (Anhang ??).

SATZ 2.41. Ist  $W$  ein Teilwald eines Graphen  $\Gamma$ , dann gilt:

$$H_i(\Gamma) \cong H_i(\Gamma/W)$$

für alle  $i \geq 0$ .

BEWEIS. Da die Sequenz

$$0 \longrightarrow K_\bullet(W) \xrightarrow{i'_\bullet} C_\bullet(\Gamma) \xrightarrow{\omega_\bullet} C_\bullet(\Gamma/W) \longrightarrow 0$$

nach Proposition 2.37 exakt ist, gibt es nach ?? eine dazugehörige lange exakte Sequenz von Homologiegruppen

$$\dots \longrightarrow H_1(K_\bullet(W)) \longrightarrow H_1(\Gamma) \longrightarrow H_1(\Gamma/W) \longrightarrow H_0(K_\bullet(W)) \longrightarrow H_0(\Gamma) \longrightarrow H_0(\Gamma/W) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Wegen der Exaktheit, und da nach Lemma 2.39  $H_i(K_\bullet(W)) = 0$  ist, ergeben sich für alle  $i \in \mathbb{N}$  exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow H_i(\Gamma) \rightarrow H_i(\Gamma/W) \rightarrow 0.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

**KOROLLAR 2.42.** *Sei  $\Gamma$  ein endlicher Graph. Dann sind alle Homologiegruppen von  $\Gamma$  freie abelsche Gruppen von endlichem Rang, und es gilt für alle  $n \geq 0$*

$$\text{rk}_{\mathbb{Z}}(H_n(\Gamma, \mathbb{Z})) = b_n,$$

wobei  $b_n$  die  $n$ -te Bettizahl von  $\Gamma$  ist.

**BEWEIS.** Sei  $W$  ein maximaler Teilwald von  $\Gamma$ . Nach Satz 2.41 genügt es, die Homologie von



zu berechnen. Der zu  $\Gamma/W$  gehörige Komplex ist

$$C_\bullet(\Gamma/W): 0 \longrightarrow C_1(\Gamma/W) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Gamma/W) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

wobei  $\partial_1$  und  $\partial_0$  Nullabbildungen sind (für  $\partial_1$  betrachte die Bilder der Kanten!). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} H_1(\Gamma/W, \mathbb{Z}) &= \ker \partial_1 = C_1(\Gamma/W) \cong \mathbb{Z}^{\#E_+(\Gamma/W)} \\ H_0(\Gamma/W, \mathbb{Z}) &= \ker \partial_0 / \text{im } \partial_1 = C_0(\Gamma/W) \cong \mathbb{Z}^{\#V(\Gamma/W)} \\ H_n(\Gamma/W, \mathbb{Z}) &= 0 \quad \text{für alle } n > 1. \end{aligned}$$

Diese sind freie  $\mathbb{Z}$ -Moduln endlichen Rangs. Nach der Definition der Bettizahlen in Bemerkung 2.17 ergibt sich für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{rk}_{\mathbb{Z}}(H_n(\Gamma/W, \mathbb{Z})) = b_n.$$

□

**KOROLLAR 2.43.** *Für die Eulercharakteristik eines endlichen Graphen  $\Gamma$  gilt:*

$$\chi(\Gamma) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{rk}_{\mathbb{Z}}(H_n(\Gamma)).$$

**BEWEIS.** Dies folgt nach der Definition der Eulercharakteristik (Definition 2.18) sofort aus Korollar 2.42. □

**BEMERKUNG 2.44.** (1) *Ist  $\Gamma \cong \Gamma'$ , so folgt, dass die zugehörigen Komplexe  $C_\bullet(\Gamma)$  und  $C_\bullet(\Gamma')$  isomorph sind. Somit sind für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Homologiegruppen  $H_n(\Gamma)$  und  $H_n(\Gamma/W)$  isomorph. Dies bedeutet, dass die Bettizahlen von Graphen Invarianten sind, d.h. sich bei Graphenisomorphismen nicht verändern.*

(2) *Ist  $\Gamma \rightarrow \Gamma'$  ein surjektiver Graphenmorphimus, so ergibt sich ein kommutatives Dreieck*

$$\begin{array}{ccc} C_0(\Gamma) & \longrightarrow & C_0(\Gamma') \\ & \searrow & \downarrow \\ & & H_0(\Gamma) \end{array}$$

bei dem alle Pfeile surjektiv sind. Die induzierte lineare Abbildung

$$H_0(\Gamma) \rightarrow H_0(\Gamma')$$

ist demnach surjektiv. Folglich gilt für die nullten Bettizahlen:  $b_0(\Gamma) \geq b_0(\Gamma')$ .

Im Allgemeinen gilt für surjektive  $\Gamma \rightarrow \Gamma'$  jedoch nicht  $b_1(\Gamma) \geq b_1(\Gamma')$ , wie folgendes Beispiel zeigt:



(3) *Ist  $\Gamma \rightarrow \Gamma'$  injektiv, so gilt  $b_1(\Gamma) \leq b_1(\Gamma')$ , da die Injektion  $C_1(\Gamma) \rightarrow C_1(\Gamma')$  eine Injektion*

$$H_1(\Gamma) = \ker \partial_1 \rightarrow \ker \partial'_1 = H_1(\Gamma')$$

induziert.



## Topologie

In der Topologie wird der Begriff einer Umgebung rein mengentheoretisch definiert und damit der Umgebungsbegriff der reellen Analysis abstrakt verallgemeinert.

### 1. Metrische Räume

**1.1. Normen auf  $\mathbb{R}^d$ .** Die Idee einer Norm auf dem reellen Vektorraum  $\mathbb{R}^d$  ist der Begriff der Länge eines Vektors. Sei  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ . Dann heißen

$$\| \cdot \|_2: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2} \quad \text{die Euklidnorm}$$

$$\| \cdot \|_0: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \max |x_1|, \dots, \max x_d \quad \text{die Maximumnorm}$$

$$\| \cdot \|_1: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sum_{i=0}^d |x_i| \quad \text{die Summennorm}$$

$$\| \cdot \|_p: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \left( \sum_{i=0}^d |x_i| \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p > 0) \quad \text{die } p\text{-Norm}$$

auf  $\mathbb{R}^d$ .

**BEMERKUNG 3.1.** Für  $d = 1$  stimmt  $\| \cdot \|_p$  für jedes  $p > 0$  mit dem gewöhnlichen Absolutbetrag  $| \cdot |$  auf  $\mathbb{R}$  überein.

**DEFINITION 3.2.** Eine Funktion  $\| \cdot \|: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  heißt eine Norm, falls

- (1)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
- (2) für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,
- (3) für alle  $x, y \in \mathbb{R}^d$  gilt  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  gilt.

Die Eigenschaft (3) heißt *Dreiecksungleichung*. Die Idee der Länge von Vektoren führt, wie wir gleich sehen werden, zu einem Abstandsbegriff zwischen Vektoren. Wir wiederholen noch einmal die Definition von Metrik:

**DEFINITION 3.3.** Sei  $X$  eine Menge. Eine Abbildung  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  heißt eine Metrik auf  $X$ , falls gilt:

- (1)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
- (2) für alle  $x, y \in X$  gilt  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- (3) für alle  $x, y, z \in X$  gilt  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Ein metrischer Raum ist ein Paar  $(X, d)$ , wobei  $X$  eine Menge und  $d$  eine Metrik auf  $X$  ist.

Eigenschaft (3) heißt wiederum *Dreiecksungleichung*.

**BEMERKUNG 3.4.** (1) Ist  $\| \cdot \|$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^d$ , so ist

$$d: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

eine Metrik auf  $\mathbb{R}^d$ , die von  $\| \cdot \|$  induzierte Metrik.

(2) Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so wird für jede Teilmenge  $Y \subseteq X$  durch Restriktion  $(Y, d|_Y)$  zu einem metrischen Raum.

**DEFINITION 3.5.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann heißen für  $x \in X$  und reelle  $r > 0$  die Mengen

$$\begin{aligned} B_r(x) &:= \{y \in X \mid d(x, y) < r\} && \text{Ball um } x \text{ mit Radius } r, \\ S_r(x) &:= \{y \in X \mid d(x, y) = r\} && \text{Sphäre um } x \text{ mit Radius } r. \end{aligned}$$

BEISPIEL 1. Die Einheitsbälle in  $\mathbb{R}^2$  für die Normen  $\|\cdot\|_0$ ,  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  nennen wir hier  $B_1^0(0)$ ,  $B_1^1(0)$  und  $B_1^2(0)$  und sehen folgendermaßen aus:

DEFINITION 3.6. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $U$  von  $X$  heißt *offen in  $X$* , wenn es zu jedem Punkt  $x \in U$  einen Ball  $B_r(x) \subseteq X$  gibt, der in  $U$  liegt.

BEISPIEL 2. (1) Jedes Intervall  $(a, b)$  mit  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  ist offen im metrischen Raum  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .  
 (2) Das Intervall  $(0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  ist bezüglich  $|\cdot|$  nicht offen.  
 (3) Eine beliebige Vereinigung offener Intervalle in  $\mathbb{R}$  ist offen in  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

PROPOSITION 3.7. Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^d$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $U$  ist offen bezüglich  $\|\cdot\|_2$ .
- (2)  $U$  ist offen bezüglich  $\|\cdot\|_0$ .
- (3)  $U$  ist offen bezüglich  $\|\cdot\|_1$ .

BEWEISSKIZZE. Zunächst machen wir uns klar (Skizze oder Beispiel 1), dass für die Bälle  $B_r^p(x)$  der verschiedenen  $p$ -Normen gilt:

$$(7) \quad B_r^1(x) \subseteq B_r^2(x) \subseteq B_r^0(x).$$

(2)  $\implies$  (1).  $U$  offen bezüglich  $\|\cdot\|_0 \xrightarrow{(7)}$   $U$  offen für  $\|\cdot\|_2$ .

(1)  $\implies$  (3). Dies folgt wieder mit (7).

(3)  $\implies$  (2). Wir machen uns klar, dass  $B_{\frac{r}{2}}^0(x) \subseteq B_r^1(x)$  gilt, woraus die Behauptung folgt.  $\square$

BEMERKUNG 3.8. Zwei Normen  $\|\cdot\|_a$  und  $\|\cdot\|_b$  auf einem Vektorraum  $V$  heißen *äquivalent*, wenn für beliebige Teilmengen  $U \subseteq V$  gilt:

$$U \text{ offen für } \|\cdot\|_a \iff U \text{ offen für } \|\cdot\|_b.$$

Ein normierter Körper ist ein Körper  $K$  mit einer Abbildung  $|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , die formal die Eigenschaften von Definition 3.2 erfüllt:

$$\begin{aligned} |x| = 0 &\iff x = 0 \\ |xy| &= |x||y| \\ |x + y| &\leq |x| + |y| \end{aligned}$$

Dann gilt allgemein für vollständige normierte Körper (d.h. jede Cauchyfolge konvergiert) und endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume  $V$ : alle Normen auf  $V$  sind äquivalent.

## 2. Topologie

DEFINITION 3.9.

## Begriffe aus der linearen Algebra

### 1. Faktormoduln

Sei  $A$  eine abelsche Gruppe und  $B$  ein  $\mathbb{Z}$ -Untermodul von  $A$  (in Zeichen:  $B \leq A$ ). Dann wird auf  $A$  eine Äquivalenzrelation  $\equiv_B$  wie folgt definiert:

$$a \equiv_B b, \quad \text{falls } b - a \in B.$$

Diese Relation ist nämlich

- (1) reflexiv:  $a \equiv_B a$ , da  $a - a = 0 \in B$  ist.
- (2) symmetrisch:  $a \equiv_B b$  impliziert  $a - b = -(b - a) \in B$ , also  $b \equiv_B a$ .
- (3) transitiv:  $a \equiv_B b$  und  $b \equiv_B c$  impliziert  $c - a = (c - b) + (b - a) \in B$ .

DEFINITION A.1. *Bezeichnen wir die Äquivalenzklassen von Elementen  $a \in A$  vermöge  $\equiv_B$  mit  $[a]_B$ , so nennen wir*

$$A/B := A / \equiv_B = \{[a]_B \mid a \in A\}$$

einen Faktormodul.

PROPOSITION A.2. *Es ist  $A/B$  in natürlicher Weise ein  $\mathbb{Z}$ -Modul, sodass die kanonische Projektion*

$$\pi: A \rightarrow A/B, \quad a \mapsto [a]_B$$

eine  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung ist.

BEWEIS.  $\equiv_B$  lässt sich addieren:

$$a \equiv_B b, \quad a' \equiv_B b' \Rightarrow (b + b') - (a + a') = (b - a) + (b' - a') \in B \Rightarrow a + a' \equiv_B b + b',$$

und mit ganzen Zahlen  $n \in \mathbb{Z}$  multiplizieren:

$$a \equiv_B b \Rightarrow nb - na = n(b - a) \in B \Rightarrow na \equiv_B nb.$$

Somit ist  $A/B$  ein  $\mathbb{Z}$ -Modul vermöge

$$[a]_B + [b]_B := [a + b]_B, \quad n \cdot [a]_B := [n \cdot a]_B$$

für  $a, b \in A$  und  $n \in \mathbb{Z}$ . Wir haben nämlich gezeigt, dass die Addition und  $\mathbb{Z}$ -Multiplikation nicht von der Wahl von Vertretern  $a' \in [a]_B$  und  $b' \in [b]_B$  abhängt; die Modulaxiome sind erfüllt, da sie vertreterweise gelten.  $\square$

Wichtige Beispiele für Untermoduln sind etwa für eine  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung  $\alpha: A \rightarrow B$ :  $\ker \alpha$  und  $\operatorname{im} \alpha$ . Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} a, b \in \ker \alpha &\Rightarrow \alpha(a - b) = \alpha(a) - \alpha(b) = 0 \Rightarrow a - b \in \ker \alpha \\ a' = \alpha(a), b' = \alpha(b) \in \operatorname{im} \alpha &\Rightarrow a' - b' = \alpha(a - b) \in \operatorname{im} \alpha. \end{aligned}$$

Insbesondere sind die Homologiegruppen tatsächlich  $\mathbb{Z}$ -Moduln.

PROPOSITION A.3. *Seien  $A, B, C$  und  $D$   $\mathbb{Z}$ -Moduln mit  $B \leq A$  und  $D \leq C$ . Dann induziert jede  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung  $\varphi: A \rightarrow C$  mit  $\varphi(B) \subseteq D$  eine  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung der Faktormoduln:*

$$\bar{\varphi}: A/B \rightarrow C/D$$

BEWEIS. Sei  $x + B \in A/B$ . Dann setzen wir  $\bar{\varphi}(x + B) := \varphi(x) + D \in C/D$ . Dies ergibt eine wohl definierte Abbildung  $\bar{\varphi}: A/B \rightarrow C/D$ : ist nämlich  $x + B = y + B \in A/B$ , so folgt

$$x - y \in B \implies \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y) \in D \implies \varphi(x) + D = \varphi(y) + D,$$

also  $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(y)$ . Die  $\mathbb{Z}$ -Linearität von  $\bar{\varphi}$  gilt auf Grund der  $\mathbb{Z}$ -Linearität von  $\varphi$ .  $\square$