Universität Karlsruhe (TH)
Institut für industrielle Bauproduktion
Dr. P. E. Bradley
Karsten Kremer

21. April 2005

Mathematik für Architekten — Rechnerübung 2

Aufgabe 1:

Wir wollen heute verschiedene Relationen auf der Menge $M := \{0, \ldots, 6\}$ untersuchen. Eine solche Relation besteht aus einer Teilmenge von $M \times M$ (das ist die Menge aller Paare von Zahlen zwischen 0 und 6). Eine Relation kann also dadurch definiert werden, dass man diese Teilmenge angibt, d.h. alle Paare (x, y) aufschreibt, für die die Relation erfüllt ist. Wir wollen dies nun für die Relation „$<$“ durchführen:

Starte Excel und gib in einem neuen Tabellenblatt die Zahl 0 in der Zelle `A1` und die Zahl 1 in der Zelle `B1` ein. Es gilt $0 < 1$. Gib nun in den folgenden Zeilen genauso alle Zahlenpaare $(x, y) \in M \times M$ ein, für die $x < y$ gilt. Dabei sollen nur Werte zwischen 0 und 6 berücksichtigt werden (sonst wäre $(x, y) \notin M \times M$).

Man kann sich eine Relation veranschaulichen, in dem man in einem Diagramm alle Paare (x, y) als Punkte einträgt. Wir wollen nun ein solches Diagramm mit Excel erzeugen:

Markiere alle eingegebenen Zahlen. Wähle nun aus dem Menü `Einfügen` den Eintrag `Diagramm`. Es öffnet sich ein Dialogfenster. Wähle hier in der linken Spalte als Diagrammtyp `Punkt (XY)`. Klicke nun zweimal auf `Weiter`. Wähle jetzt das Blatt `Gitternetzlinien`, und entferne dort alle Häkchen. Entferne ebenso im Blatt `Legende` das Häkchen vor `Legende anzeigen`. Klicke dann auf `Fertig stellen`.

Aufgabe 2:

Eine Relation R ist Graph einer Abbildung $f : M \to M$, wenn gilt

$$R = \{(x, y) : f(x) = y\} \subseteq M \times M$$

Erstelle wie in Aufgabe 1 Diagramme zu den folgenden Relationen. Sind diese Relationen Graphen von Abbildungen? Warum?

a) $R = \{(x, y) \in M \times M : x < y\}$ (Diagramm bereits in Aufgabe 1 erstellt)

b) $R = \{(x, y) \in M \times M : x \text{ und } y \text{ sind teilerfremd}\}$

c) $R = \{(x, y) \in M \times M : y = 0\}$

d) $R = \{(x, y) \in M \times M : y = x^2\}$

e) $R = \{(x, y) \in M \times M : 2y = x\}$

— bitte wenden —

Aufgabe 3:

Erstelle die Graphen der folgenden Funktionen:

a) $f : M \to M; x \mapsto (-1)^x + 3$

b) $f : M \to M; x \mapsto 6 - x$

c) $f : M \to M; x \mapsto \mathrm{card}\{y \in M : y \text{ teilerfremd zu } x\}$

Wir wollen untersuchen, ob die Funktionen injektiv oder surjektiv sind. Dazu bestimmen wir zu jedem $y \in M$ die Anzahl der $x \in M$, für die $f(x) = y$ gilt. Trage dazu in Spalte `C` neben der Wertetabelle der Funktion die Formel `=zählenwenn(B$1:B$7;A1)` ein. Diese Formel zählt, wie oft in den Zellen zwischen `B1` und `B7` Zahlen vorkommen, die eine festgelegte Auswahlbedingung erfüllen (in diesem Fall die Zellen, deren Wert der gleiche ist, wie in `A1`). Die Zeilennummern musst du natürlich durch die Zeilennummern deiner Wertetabelle ersetzen. Kopiere die Formel in alle Zeilen der Wertetabelle. Die `$`-Zeichen verhindern, dass der Bereich beim Kopieren automatisch verändert wird.

Wie erkennt man, ob die Funktionen surjektiv, injektiv oder bijektiv sind?

Versuche für alle drei Eigenschaften Excel-Formeln zu finden, welche automatisch berechnen, ob die Eigenschaft erfüllt ist oder nicht, und entsprechend `wahr` oder `falsch` anzeigen. Verwende dazu nochmals die Funktion `zählenwenn`. Bei dieser Funktion ist es übrigens auch möglich, eine Auswahlbedingung der Form ‘‘`>0`‘‘ oder ‘‘`<=1`‘‘ anzugeben.

Gibt es eine Funktion $f : M \to M$, bei der nicht alle drei Eigenschaften gleich sind?