Universität Karlsruhe (TH)
Institut für industrielle Bauproduktion
Dr. P. E. Bradley
Karsten Kremer

12. Mai 2005

Mathematik für Architekten — Rechnerübung 4

Aufgabe 1: Wir betrachten die Menge der 2×2 Matrizen

$$\mathbb{R}^{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Auf dieser Menge definieren wir die Verknüpfung $\cdot$ folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Suche dir zwei Matrizen A und B aus, und berechne mit Excel $A \cdot B$. Hinweis: die Zeichen für die Grundrechenarten in Excel sind `+`, `-`, `*`, `/` und `^`. Überprüfe durch Ausrechnen einiger Produkte, ob die Verknüpfung $\cdot$ kommutativ bzw. assozativ ist.

Überlege dir, wie eine Matrix E aussehen muss, für die $A \cdot E = A$ für jede Matrix A gilt. Überprüfe dein Ergebnis am Rechner mit verschiedenen Matrizen A. Überprüfe auch, ob ebenfalls $E \cdot A = A$ gilt.

Aufgabe 2: Auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definieren wir folgende Abbildungen:

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$$

Schreibe Excel-Formeln, die zu einer Matrix A die Funktionswerte $\det(A)$ und $f(A)$, sowie das Produkt $A \cdot f(A)$ berechnen. Was fällt auf?

Rate, wie eine Matrix A^{-1} aussehen könnte, für die $A \cdot A^{-1} = E$ gilt. Überprüfe dein Ergebnis an Beispielen. Berechne jeweils auch $A^{-1} \cdot A$. Für welche Matrizen A kann man A^{-1} nicht berechnen? Warum nennt man $\det(A)$ die „Determinante“ von A?

Aufgabe 3: Wir definieren nun $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det(A) \neq 0\}$.

Ist die eingeschränkte Abbildung $\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ surjektiv?

Überlege dir kurz, dass $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation eine abelsche Gruppe bildet.

Schreibe Excel-Formeln, die zu $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die folgenden Werte berechnen:

$$\det(A) \cdot \det(B) \qquad \det(A \cdot B) \qquad \det(A^{-1}) \qquad \det(A)^{-1} \qquad \det(E)$$

Was fällt auf? Ist $\cdot$ eine Verknüpfung auf $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?

Die Menge $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit der Verknüpfung $\cdot$ ist ein Beispiel für eine *nicht-abelsche Gruppe*. Was könnte *abelsch* bedeuten?

Die Abbildung det zwischen den Gruppen $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist ein Beispiel für eine *lineare* Abbildung, denn $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.