Universität Karlsruhe (TH)
Institut für industrielle Bauproduktion
Dr. P. E. Bradley
Karsten Kremer

19. Mai 2005

Mathematik für Architekten — Rechnerübung 5

Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und einen Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ist

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ x \mapsto Ax := \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung. Diese wollen wir heute untersuchen.

Erinnerung: Die Matrixmultiplikation werden wir später auch noch brauchen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1:

Öffne ein neues Excel-Blatt und schreibe eine beliebige Matrix A mit Koeffizienten zwischen -1,5 und 1,5 in die Zellen `A3` bis `B4`. Schreibe in die folgenden Spalten die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei soll die erste Komponente jeweils in Zeile `A` und die zweite in Zeile `B` stehen. Berechne nun jeweils unter dem Vektor x in den Zeilen `C` und `D` die Komponenten des Vektors $f_A(x)$.

Die Vektoren des $\mathbb{R}^2$ kann man sich als Punkte in der Ebene veranschaulichen. Klicke dazu im Menü `Einfügen` auf `Diagramm`, wähle dort in der linken Spalte `Punkt (XY)` und in der linken Spalte das Bild ganz rechts unten (gerade Linien ohne markierte Punkte). Klicke nun auf `Weiter`.

Markiere als Datenbereich die Urbild-Vektoren in den Zeilen `A` und `B`. Wir wollen auch die Bild-Vektoren anzeigen lassen, klicke dafür ganz oben auf `Reihe`, dort auf `Hinzufügen` und gib unter `X-Werte` die Komponenten der Vektoren in Zeile `C` und unter `Y-Werte` die in Zeile `D` an. Klicke wieder auf `Weiter`. Schalte jetzt die Gitternetzlinien und die Legende aus und klicke auf `Fertig stellen`.

Klicke nun mit der rechten Maustaste auf die x-Achse, wähle dort `Achse formatieren` und stelle unter `Skalierung` als Minimum -3 und als Maximum 3 ein. Wiederhole das Gleiche für die y-Achse.

Uff. Geschafft. Zur Belohnung darfst du jetzt die Koeffizienten deiner Matrix ändern und beobachten, was für Bilder dabei rauskommen. . .

Finde eine Matrix, die $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ abbildet.

— bitte wenden —

Aufgabe 2:

Schreibe eine Zahl a zwischen 0 und 20 in die Zelle `A7` und berechne die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{a}{10} & 0 \\ 0 & \frac{a}{10} \end{pmatrix}$$

in den Zellen `A8` bis `B9`. Übernimm diese Werte in die Abbildungsmatrix aus Aufgabe 1, indem du in der Zelle `A3` die Formel `= A8` einträgst, und diese dann kopierst.

Wir wollen nun die Zahl a leicht ändern können. Wähle dazu aus dem Menü `Ansicht` den Punkt `Symbolleisten` → `Formular`. Klicke in dieser Symbolleiste auf das Symbol `Bildlaufleiste` und ziehe mit der Maus ein schmales Rechteck. Klicke nun auf die erstellte Bildlaufleiste mit der rechten Maustaste, wähle `Steuerelement formatieren` und gib als Zellverknüpfung `A7` und als Maximalwert 20 an.

Schiebe nun den Regler hin und her, und beobachte das Diagramm aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3:

Wiederhole Aufgabe 2 mit einer Zahl b zwischen 0 und 360 und der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{b\pi}{180}\right) & \sin\left(\frac{b\pi}{180}\right) \\ -\sin\left(\frac{b\pi}{180}\right) & \cos\left(\frac{b\pi}{180}\right) \end{pmatrix}$$

Die Zahl π erhältst du in Excel mit der Formel `=pi()`. Gib als Maximalwert für den Schieberegler 360 an.

Aufgabe 4:

Wiederhole Aufgabe 2 mit einer Zahl c zwischen 0 und 20 und der Matrix

$$C := \begin{pmatrix} \frac{c}{10} & 0 \\ 0 & \frac{10}{c} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

Wiederhole Aufgabe 3 mit einer Zahl d und der gleichen Matrix. Dazu kannst du einfach die Zellen aus Aufgabe 3 kopieren, und einen neuen Schieberegler erzeugen.

Aufgabe 6:

Wir wollen nun die Abbildungen aus den vorangegangenen Aufgaben miteinander kombinieren. Berechne dazu die Matrix $A \cdot B \cdot C \cdot D$ und übernimm deren Einträge wieder in die Matrix aus Aufgabe 1.

Setze zunächst $a = c = 10$ und $b = d = 0$ und beobachte dann, was passiert, wenn du mehrere Regler änderst. Mache dir klar, dass die Matrixmultiplikation gerade die Hintereinanderausführung der Abbildungen beschreibt.