Universität Karlsruhe (TH)
Institut für industrielle Bauproduktion
Dr. P. E. Bradley
Karsten Kremer

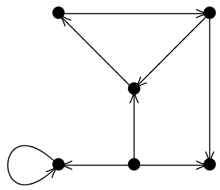
9. Juni 2005

Mathematik für Architekten — Rechnerübung 7

Aufgabe 1:

In der letzten Rechnerübung haben wir berechnet, ob man von einer Ecke aus alle anderen Ecken im Graphen erreichen kann. Die dabei verwendete Matrixmultiplikation war sehr aufwändig. Wir werden heute eine einfachere Methode kennenlernen.

Gegeben sei der folgende Graph Γ:



Wir setzen nun eine Maus auf die Ecke E des Graphen. In jeder Minute bewegt sie sich entlang der Pfeile zu den benachbarten Ecken (falls es hierfür mehr als eine Möglichkeit gibt, vermehrt sie sich spontan; gibt es keine Möglichkeit, so stirbt sie aus). Wie viele Mäuse sitzen auf welchen Ecken nach einer Sekunde? Wie sieht das ganze nach zwei, drei und vier Sekunden aus? Woran merkst du, dass man von der Ecke E aus alle anderen Ecken erreichen kann?

Dieses Verfahren führen wir nun mit dem Rechner durch:

a) Bestimme die Adjazenzmatrix A von Γ und trage sie in den Bereich `A1:F6` ein. Dabei sei E die Ecke mit der Nummer 1.

b) Schreibe den Einheitsvektor $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ in die Spalte `H` neben die Matrix. Berechne nun in der Spalte `I` den Vektor $e_2 := A \cdot e_1$. Mache dir klar, dass dieser Vektor die Mäuse nach einer Sekunde beschreibt.

c) Berechne $e_i := A \cdot e_{i-1}$ für $i \in \{3, \ldots, 6\}$. Was hat das mit den Mäusen zu tun?

d) Berechne $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6$. Woran kann kann sehen, ob alle Ecken erreicht worden sind? Erstelle eine Formel, die die Antwort ausgibt.

e) Lösche nun eine Kante aus Γ, so dass nicht mehr alle Ecken erreicht werden. Berechne, wie viele Ecken nicht erreicht werden. Verwende dazu die Excel-Funktion `zählenwenn`. Füge danach die gelöschte Kante wieder ein.

— bitte wenden —

Aufgabe 2:

Kopiere die Adjazenzmatrix A des Graphen Γ aus Aufgabe eins (bitte dieses eine Mal *echt* kopieren und nicht mit Formeln die Werte übernehmen). Wir wollen nun aus Γ einen ungerichteten Graphen G machen, indem wir zu jeder Kante auch die entgegengesetzt gerichtete Kante hinzunehmen.

a) Berechne dazu zuerst die Adjazenzmatrix des Graphen Γ_c, in dem alle Kanten entgegengesetzt gerichtet sind.

   Hinweis: Finde zuerst heraus, was die Excel-Funktionen `=zeile()` und `=spalte()` tun, und verwende dann die Funktion `index`, um jeweils den richtigen Eintrag aus A auszuwählen.

b) Summiere nun einfach die Adjazenzmatrizen von Γ und Γ_c, um eine Matrix des gesuchten ungerichteten Graphen G zu finden.

Aufgabe 3:

In einem ungerichteten Graphen gilt: ein Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn es von einer (beliebigen) Ecke jeweils einen Weg zu allen anderen Ecken gibt.

a) Ermittle die Anzahl der (ungerichteten) Kanten des Graphen G aus Aufgabe 2, indem du die Kanten von Γ zählst.

b) Überprüfe, ob G zusammenhängend ist. Ersetze dazu die Adjazenzmatrix A in Aufgbe 1 durch die in Aufgabe 2 errechnete Adjazenzmatrix des ungerichteten Graphen (übernimm die Matrix diesmal wieder durch Formeln).

c) Unter der Voraussetzung, dass G zusammenhängend ist, kannst du die erste Betti-Zahl $b_1(G)$ mit der Euler-Poincaré-Formel berechnen.

d) Überprüfe, ob G ein Baum ist.

Aufgabe 4:

Finde einen spannenden Baum von G. Gehe dabei folgendermaßen vor:

a) Lösche eine Kante aus Γ.

b) Falls G dadurch unzusammenhängend geworden ist, füge sie wieder ein.

c) Wiederhole a) und b), bis nur noch ein Baum übrig ist.

Beobachte, dass sich bei jeder gelöschten Kante die erste Betti-Zahl um eins verringert.