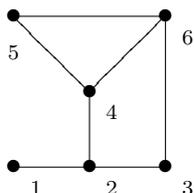


Mathematik für Architekten — Rechnerübung 9

Aufgabe 1:

Gegeben sei der folgende Graph G :



In der vorletzten Rechnerübung haben wir Mäuse auf diesem Graphen herumlaufen lassen. Diesmal haben wir nur eine Maus, die sich durch den Graphen bewegt. Sei X_t die Ecke, auf der sich die Maus zum Zeitpunkt t befindet. Zu jedem Zeitpunkt entscheidet sich die Maus zufällig, zu welcher der benachbarten Ecken sie weiterläuft: dabei ist die Wahrscheinlichkeit für „Stehenbleiben“ immer 40%, die übrigen Wahrscheinlichkeiten sind alle gleich.

Beispiel: Die Ecke 2 hat drei Nachbarn. Falls sich die Maus zum Zeitpunkt t in der Ecke 2 befindet, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie stehenbleibt 40%. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie weiterläuft ist also 60%, und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie sich einen Schritt später in der Ecke 3 befindet, ist genau $\frac{60\%}{3} = 20\%$. In Formeln heißt das:

$$P(X_{t+1} = 2 \mid X_t = 2) = 0,4 \qquad P(X_{t+1} = 3 \mid X_t = 2) = 0,2$$

a) Berechne (von Hand) alle bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} := P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$$

und schreibe sie in eine Matrix (i ist die Nummer der Spalte, j die der Zeile).

b) Wir setzen die Maus zum Zeitpunkt 0 auf die Ecke 1. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten $x_i^0 := P(X_0 = i)$ für alle Ecken i ? Trage den Vektor x^0 als Spaltenvektor neben der Matrix ein.

c) Berechne nun die Wahrscheinlichkeiten für den Aufenthaltsort der Maus nach einem Schritt. Dies ist der Vektor x^1 mit $x_i^1 := P(X_1 = i)$. Verwende dabei die Formel

$$P(X_1 = j) = \sum_{i=1}^6 P(X_0 = i \text{ und } X_1 = j) = \sum_{i=1}^6 P(X_1 = j \mid X_0 = i) \cdot P(X_0 = i)$$

d) Nun schauen wir uns an, was nach 50 Schritten passiert: Berechne den Vektor x^{50} mit $x_i^{50} := P(X_{50} = i)$. Ändert sich das Ergebnis, wenn man noch einen Schritt mehr macht? Wie hängt das Ergebnis mit dem Grad der jeweiligen Ecke zusammen? Überprüfe deine Vermutungen, indem du den Graphen leicht veränderst.

Aufgabe 2:

Wirf einen Würfel 100 mal, und trage die Ergebnisse in eine Spalte der Tabelle ein.

Falls du gerade keinen Würfel zur Hand hast, simuliere das Experiment mit Excel. Zum Simulieren von Zufallsexperimenten benötigt man einen Zufallsgenerator. In Excel gibt es dazu die Funktion `=zufallszahl()`, die eine Zufallszahl zwischen 0 und 1 liefert.

- a) Simuliere einen Würfel. Schreibe dazu zunächst eine Formel, die eine zufällige ganze Zahl zwischen 1 und 6 liefert (dabei kann die Funktion `=runden` hilfreich sein). Kopiere diese Zelle 100 mal.
- b) Ermittle bei jedem Würfelwurf, ob die geworfene Zahl gerade oder ungerade war. Hier hilft die Funktion `=rest` weiter.
- c) Zähle, wie oft eine 1 gewürfelt wurde. Zähle wie oft eine Zahl gewürfelt wurde, die größer als 4 war. Zähle, wie viele gerade Zahlen gewürfelt wurden. Verwende jeweils die Funktion `=zählenwenn`.
- d) Berechne mit der Funktion `=mittelwert` den Durchschnitt der gewürfelten Zahlen.

Aufgabe 3:

Wir werden in dieser Aufgabe das Ziegenproblem des Übungsblatts simulieren. Am sinnvollsten ist es, alle Ergebnisse der folgenden Teilaufgaben in einer Zeile nebeneinander zu schreiben. Dann kann man später diese Zeile mehrfach untereinander kopieren, um das Experiment mehrmals unabhängig durchzuführen.

- a) Im ersten Schritt des Zufallsexperiments wird ein Hauptgewinn hinter einer von drei Türen versteckt. Berechne in einer Zelle die Nummer dieser Tür mit Hilfe des Zufallszahlengenerators.
- b) Nun deutet Alice auf eine der Türen. Da für Alice alle Türen gleich aussehen, gehen wir davon aus, sie deutet auf die Tür Nummer 1.
Bob öffnet nun eine der Türen, auf die Alice nicht gedeutet hat (also Nummer 2 oder Nummer 3), und zwar eine, hinter der nicht der Hauptgewinn versteckt ist. Falls beide Türen möglich sind, entscheidet er sich zufällig. Berechne in einer Zelle die Nummer der Tür, die Bob öffnet.
- c) Berechne die Nummer der Tür, die nun (außer der Tür 1) noch geschlossen ist. Nun muss sich Alice entscheiden: Entweder sie bleibt bei der gewählten Tür 1, oder sie wechselt zu dieser Tür.
Berechne in einer Zelle, ob sie den Hauptgewinn bekommt, wenn sie wechselt. Berechne in einer anderen Zelle, ob die den Hauptgewinn bekommt, wenn sie bei ihrer ursprünglichen Entscheidung bleibt.
- d) Wiederhole das Experiment 100 mal, indem du die erstellte Zeile 100 mal kopierst. Schreibe eine Funktion, die zählt, wie oft „Wechseln“ die bessere Strategie war. Verwende die Funktion `=zählenwenn`.