Universität Karlsruhe (TH)
Institut für industrielle Bauproduktion
Dr. P. E. Bradley
Karsten Kremer

7. Juli 2005

Mathematik für Architekten — Rechnerübung 10

Eine gezinkte Münze wird n Mal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit für „Kopf" sei p. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der „Kopf"-Würfe.

Aufgabe 1:

Trage die Werte $n = 10$ und $p = 0{,}5$ in zwei Zellen des Tabellenblatts ein. Berechne für alle $k \in \{0, \ldots, 10\}$ die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(X = k)$ nach in der Vorlesung besprochenen Formel

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{mit} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Benutze die Excel Formel `=fakultät`.

Berechne außerdem die Funktionswerte der Verteilungsfunktion von X, also die Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(X \leq k)$.

Erstelle für jede der Funktionen $k \mapsto \mathrm{P}(X = k)$ und $k \mapsto \mathrm{P}(X \leq k)$ ein Schaubild. Markiere dazu die x- und die y-Werte, und wähle aus dem Menü `Einfügen` den Befehl `Diagramm`. Verwende als Diagrammtyp ein XY-Diagramm mit Verbindungslinien.

Lies aus einem der Diagramme ab, wie groß etwa die Wahrscheinlichkeit ist, maximal viermal Kopf zu werfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mehr als sechsmal Kopf zu werfen? Was ist also $\mathrm{P}(4 < X \leq 6)$?

Aufgabe 2:

Berechne (wieder für $n = 10$ und $p = 0{,}5$) den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$, die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ und die Standardabweichung $\sigma(X)$. Zur Erinnerung hier nochmal die Formeln:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{10} k \cdot \mathrm{P}(X = k), \quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X^2), \quad \sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Lege dazu zunächst eine Wertetabelle von X^2 an, und verwende dann die Funktionen `=summenprodukt` und `=wurzel`.

Vergleiche die berechneten Werte mit den theoretischen Werten für die Binomialverteilung $\mathrm{E}(X) = np$ und $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

Ändere p und prüfe, ob $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$ immer noch stimmen. Beobachte dabei auch die Diagramme aus Aufgabe 1.

— bitte wenden —

Aufgabe 3:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $X_{a,b} := a \cdot X + b$. Berechne von den Zufallsvariablen $X_{1,7}$ und $X_{3,0}$ jeweils den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung. Wie hängen diese Werte mit denen von X zusammen? Finde ein $b \in \mathbb{R}$, mit $\mathrm{E}(X_{1,b}) = 0$. Finde ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Var}(X_{a,0}) = 1$.

Rechne nach, dass die Zufallsvariable

$$X_* := \frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$$

Erwartungswert 0 und Varianz 1 hat. X_* heißt *Standardisierung* von X.

Aufgabe 4:

Berechne für $k \in \{0, \ldots, 10\}$ jeweils den Wert

$$\varphi(k) := \frac{1}{\sigma(X)\sqrt{2\pi}} \exp(-k_*^2/2) \quad \text{mit} \quad k_* := \frac{k - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$$

Dabei ist $\exp(x) := e^x$ mit $e \approx 2{,}71$. Verwende die Excel-Funktionen `=pi` und `=exp`.

Vergleiche $\varphi(k)$ mit $\mathrm{P}(X = k)$ (auch im Diagramm). Ändere p und vergleiche noch einmal.

Anmerkung: Eine Zufallsvariable Y mit $\mathrm{P}(Y = k) = \varphi(k)$ heißt *normalverteilt*. Die Binomialverteilung konvergiert für große n gegen eine Normalverteilung. Die Normalverteilung lässt sich dabei wesentlich einfacher berechnen als die Binomialverteilung, da man keine Binomialkoeffizienten berechnen muss.

Aufgabe 5:

Setze $n = 100$ und $p = 0{,}5$. Passe alle bisherigen Formeln und Diagramme so an, dass sie weiter funktionieren. Lies im Diagramm für die Verteilungsfunktion $k \mapsto \mathrm{P}(X \leq k)$ ab, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass maximal 40 mal Kopf geworfen wird. Vergleiche mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1.

Gib ein möglichst kleines Intervall I an, so dass $\mathrm{P}(X \in I) \geq 0{,}99$ gilt.