1. Aussagenlogik

„Für jede projektive Varietät gibt es zu jeder Hodgeklasse ein Vielfaches, welches einen algebraischen Zykel enthält.“

Dies ist ein Beispiel für eine *Aussage* in der Mathematik. Allerdings wird diese Vorlesung nicht genügend Hilfsmittel beisteuern um zu verifizieren, dass es dieser Satz tatsächlich eine Aussage ist.

Ob diese Aussage nun wahr ist oder nicht, ist bis heute nicht bekannt: Es handelt sich hierbei um die so genannte *Hodgevermutung*. Mehr Details gibt es unter http://www.claymath.org/millennium/Hodge_Conjecture/ .

Für uns bemerkenswert ist lediglich die Feststellung, dass obige Aussage keine einzige Formel enthält, wohl aber die Struktur eines deutschen Aussagesatzes. Vermutlich verstehen wir jedoch nicht im Geringsten was diese Aussage bedeutet. Der Grund hierfür ist wohl in den verwendeten Vokabeln zu finden, deren Bedeutung uns unbekannt ist. In der Mathematik werden Vokabeln mittels *Definitionen* festgelegt, wobei in einer Definition jedoch die Vokabel selbst nicht in ihrer eigenen Erklärung verwendet werden darf.

Beispiel. Eine natürliche Zahl heißt *prim*, wenn sie nicht Eins ist und nur durch sich selbst und die Eins teilbar ist.

1.1. Logische Grundbegriffe

Definition.

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Konstrukt, dem genau einer der beiden Wahrheitswerte WAHR (w) oder FALSCH (f) zugeordnet werden kann.

Wir heben dabei hervor:

1) Semantik (d.h. die inhaltliche Bedeutung) ist entscheidend, Syntax (der Satzaufbau) hingegen nicht.
2) Tertium non datur: Eine Aussage ist stets entweder wahr oder falsch. Wir haben es also mit einer zweiwertigen Logik zu tun.

Es gibt auch Verallgemeinerungen zur *Fuzzy Logik* mit„Zwischenwerten“. Dort sind Aussagen teils wahr und teils falsch.

Beispiele.

a) „ ist gute Architektur.“	ist keine Aussage
b) „Frau Müller meint, sei gute Architektur.“	ist eine Aussage

Bemerkung. Auf die Nachprüfbarkeit des tatsächlichen Wahrheitswertes kommt es bei Aussagen nicht an. Es muß *prinzipiell* fest stehen, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Beispielsweise ist die Aussage

„$2^{24.036.583}$ - 1 ist eine Primzahl."

erst vor kurzem als wahr bestätigt worden. Eine Primzahl der Form $2^N - 1$ mit natürlichem N heißt übrigens *Mersenne–Primzahl*. Derartige Zahlen liefern gute Kandidaten für Primzahlrekorde.

Bei einer Aussage steht oft an Stelle des Subjektiven eine Variable X, in der Art , daß für jede Belegung von X eine Aussage daraus wird.

Beispiel. Die Aussage „X ist positiv." ist mit X = x für $x=\pi$ oder das Quadrat einer ganzen Zahl stets eine wahre Aussage, mit x = -17 stets eine falsche Aussage und mit x = mein Denken keine Aussage (aber hoffentlich dennoch wahr?).

Logische Verknüpfungen

und. Die Verknüpfung der beiden Aussagen „Es regnet." (A) *und* „Die Sonne scheint." (B) mit der Konjunktion *und* ist

- *wahr* , wenn sowohl A („Es regnet.") als auch B („Die Sonne scheint.") zutrifft.
- *falsch* in allen anderen Fällen.

Dies halten wir in einer Tabelle fest:

A	B	A und B
w	W	W
w	F	F
f	W	F
f	F	F

Statt „A und B" schreiben wir auch kurz „$A \wedge B$".

oder. Mit der Konjunktion *oder* ist die verknüpfte Aussage „Das Haus hat ein Satteldach:" (C) *oder* „Alle Wale sind Fische." (D) genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen C oder D zutrifft.

Die Tabelle hierzu lautet:

C	D	C oder D
w	W	w
w	F	w
f	W	w
f	F	f

Statt „C oder D“ geht auch kurz „$C \vee D$“.

Bemerkung: Mit *oder* ist stets das *einschließende oder* gemeint. Für das ausschließende sagen wir *entweder oder* gemäß folgender Tabelle:

A	B	entweder A oder B
w	W	f
w	F	w
f	W	w
f	F	f

Negation. Die *Negation* einer Aussage A nennen wir „nicht A“ oder kurz „$\neg A$“ und erfüllt die Tabelle

A	nicht A
w	F
f	W

Bemerkung. Kommen in den Aussagen A und B Variablen vor, so müssen für jede Belegung der Variablen in A und B die Wahrheitswerte der jeweiligen rechten Spalte gelten.

Implikation.

„Wenn alle Wale Fische sind, dann bekommst du ein Essen in der Mensa“ **w**
f w

„Wenn du an dieser Uni eingeschrieben bist, bekommst du ein Essen in der Mensa“ **w**
w w

„Wenn 9 eine Primzahl ist, dann sind alle Wale Fische.“ **w**
f f

„Wenn 8 gerade ist, dann ist 9 eine Prinzahl.“ **f**
w f

Auch der *Satz von Euklid* ist eine Implikation:

> „Wenn eine natürliche Zahl größer als Eins ist, dann hat N einen Primteiler."

Die Implikation „Wenn X denkt, dann ist X." führt Descartes vielleicht auf seinen berühmten Ausspruch „Cogito, ergo sum."

Sind X und Y Aussagen, so ist die *Implikation* über die Tafel erklärt

X	Y	X impliziert Y
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Für die Implikation „X impliziert Y" schreiben wir auch kurz : „$X \Rightarrow Y$".

Äquivalenz. Haben zwei Aussagen A und B, etwa

A: „ x ist eine nicht negative Zahl."

und

B: „ x ist das Quadrat einer reellen Zahl.")

Für jede Belegung von x stets denselben Wahrheitswert, dann heißen A und B *äquivalent*.

Kurz: $A \Leftrightarrow B$

Bemerkung. Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zur Aussage $\neg A \vee B$, wie wir durch Ansehen der zugehörigen Tafeln erkennen.

Kontraposition. Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zur Implikation nicht $B \Rightarrow$ nicht A.

Beweis. Durch „äquivalentes Umformen" sehen wir

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee \neg A) \Leftrightarrow (\neg(\neg B) \vee (\neg A)) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Quantoren.

Betrachten wir einmal folgende Aussage:

A: „Jede positive reelle Zahl ist das Quadrat einer reellen Zahl."

Hier wird eine Aussage über ausnahmslos jedes Element eines vorgegebenen Bereichs gemacht:

„ Jede positive reelle Zahl……"

Dies ist gleichbedeutend mit

„Für alle reellen Zahlen, die positiv sind, ……."

Bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$ der Menge der reellen Zahlen, so können wir die kurz ausdrücken als:

„ $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \wedge\ x > 0$ "

Setzen wir $\mathbb{R}_{>0} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist positiv} \}$, so haben wir gleichbedeutend hiermit :

„$\forall\ x \in \mathbb{R}_{>0}$"

Das Zeichen $\forall$ lesen wir als „für alle" und heißt der *Allquantor*

Im hinteren Teil der Aussage A wird eine *Existenz* behauptet, allerdings versteckt:

„…. Ist das Quadrat einer reellen Zahl."

Äquivalent hierzu ist:

„…… gibt es eine reelle Zahl, deren Quadrat sie ist."

Gemeint ist, dass *mindestens ein* Gegenstand x *existiert*, der die genannte Eigenschaft besitzt.

„$\exists\ y \in \mathbb{R}$ mit $x = y^2$ "

Das Zeichen $\exists$ lesen wir als „existiert" und heißt der *Existenzquantor.*

Wer Formeln mag könnte die Aussage auf äquivalente Weise etwa so schreiben:

F: „$\forall\ x \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists\ y \in \mathbb{R}:\ x = y^2$ "

Bemerkung. Die prosaische und die formelmäßige Ausdrucksweise desselben Sachverhaltes sind als gleichwertig anzusehen. Es ist also A nicht „unmathematischer“ als F oder gar unpräziser. Im Allgemeinen ist für Menschen mit Formeln eher sparsam umzugehen, soweit dies möglich ist.

Negation von Aussagen mit Quantoren. Sei P(x) eine Eigenschaft, die x haben kann. Dann wird erklärt:

1. $\neg(\forall\ x: P(x))$ als $\exists x: \neg P(x)$

D.h. Die Negation von

„Jedes x hat P(x).“

ist

„Es gibt (mindestens ein) x für welches P(x) nicht gilt.“

2. $\neg(\exists\ x: P(x))$ als $\forall x : \neg P(x)$

D.h. die Negation von

„Es gibt (mindestens ein) x mit P(x).“

ist

„Alle x erfüllen $\neg$P(x).“.

Äquivalent hierzu ist auch „Kein y erfüllt P(y).“.