# 2. Mengen

Georg Cantor (1845-1918) definiert:

„Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen."

**Beispiel**. Das bekannte Paradoxon:

„Rasiert der Barbier, der alle Menschen rasiert, die sich selbst nicht rasieren, sich selbst oder nicht?"

führte Bertrand Russell (1872-1970) auf folgende Frage:

„Enthält die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst (als Element) enthält, denn sich selbst ?"

Cantors Mengenlehre enthält also einen Widerspruch!

## 2.1 Konstruktionen

**1. Die leere Menge**. $\varnothing$ enthält keine Elemente.

**2. Gleichheit**. Die Menge Q aller reellen Quadratzahlen stimmt mit der Menge $\mathbb{R}_{\geq 0}$ aller nicht negativen reellen Zahlen überein, weil eine reelle Zahl x genau dann nicht negativ ist, wenn x Quadrat ist.

Kurz:

$$Q = \mathbb{R}_{\geq 0} \text{, weil } \boxed{x \in Q \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$$

Wir definieren also die Gleichheit von Mengen X und Y:

X = Y gilt genau dann, wenn jedes Element von X eines von Y ist und umgekehrt. Dies ist gleichbedeutend mit

$$x \in X \Leftrightarrow x \in Y.$$

**Bemerkung.** Es gibt genau eine leere Menge.

*Beweis. Eindeutigkeit*: Seien nämlich $\varnothing_1$ und $\varnothing_2$ leere Mengen. Es gilt:

$$x \notin \varnothing_1 \Leftrightarrow x \notin \varnothing_2 .$$

Da beide Mengen kein Element enthalten, gilt $\varnothing_1 = \varnothing_2$.

*Existenz*: Die leere Menge kann beschrieben werden als

$$\varnothing = \{x \mid A(x) \wedge \neg A(x) \text{ für irgendeine Aussage } A\}.$$

Da dies eine Menge ist, ist ihre Existenz hiermit gesichert.

**3. Teilmenge.** Betrachten wir die Eigenschaft E(x): "x ist ein Blauwal". Sei W die Menge aller Wale. Dann ist die Menge B aller Blauwale eine Teilmenge von W, da B mit der Menge aller Wale übereinstimmt, welche die Eigenschaft E(x) erfüllen:

$$B \subseteq W, \text{ da } \quad B = \underbrace{\{x \in W \mid E(x) \text{ gilt}\}}_{=:C}$$

So wird allgemein die Inklusion $C \subseteq W$ definiert:

$$C = \{x \in W \mid E(x) \text{ gilt}\} \text{ macht } C \text{ zur Teilmenge von } W.$$

*Beweis von B = C im Beispiel*.

$$x \in B \;\Leftrightarrow\; x \text{ ist Blauwal} \;\underset{\uparrow}{\Leftrightarrow}\; x \text{ ist ein Wal und } x \text{ ist ein Blauwal} \;\Leftrightarrow\; x \in C$$

Grund: Jeder Blauwal ist ein Wal

**4. Durchschnitt.** Sei X = {x | x ist ein Holzmöbelstück} und Y die Menge aller Tische. Dann ist

$$X \cap Y = \{x \mid x \text{ ist Holzmöbel und } x \text{ ist Tisch}\} = \{x \mid x \in X \text{ und } x \in Y\}$$
$$= \{x \mid x \text{ ist ein Holztisch}\}$$

Allgemein definieren wir für Mengen X und Y:

$$X \cap Y := \{x \mid x \in X \text{ und } x \in Y\}.$$

**5. Vereinigung.** Die Vereinigung von Mengen gelingt mit Hilfe der Konjunktion „oder":

$$X \cup Y = \{x \mid x \text{ ist Holzmöbel oder Tisch}\} = \{x \mid x \in X \text{ oder } x \in Y\}.$$

Allgemein für Mengen X und Y:

$$X \cup Y := \{x \mid x \in X \text{ oder } x \in Y\}$$

**6. Differenzmenge.** Es werden bei der Differenzmenge die Elemente der Menge Y weggelassen: Die Menge

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ und } x \notin Y\}.$$

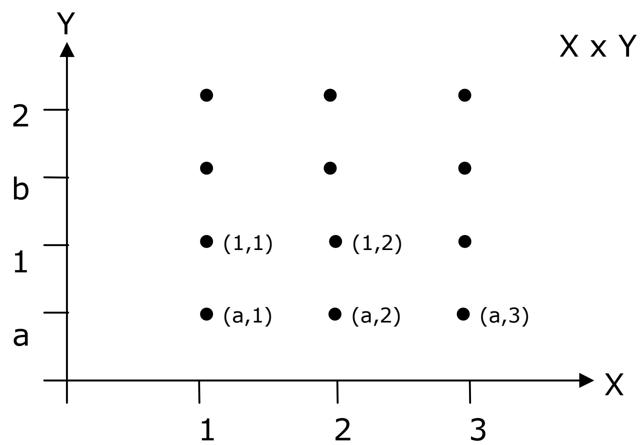
heißt das *Komplement* von Y in X.

**Beachte**. Es wird *nicht* verlangt, dass $Y \subseteq X$ ist.

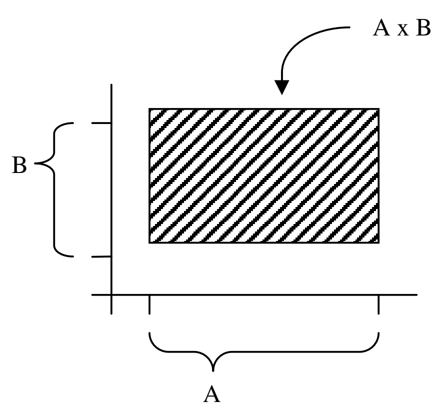
**7. Kartesisches Produkt.** Das *kartesische Produkt* von Mengen X und Y ist die Menge aller Paare (x,y) mit $x \in X$ und $y \in Y$:

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$$

**Beispiel.** $X = \{1,2,3\}$ , $Y = \{a,1,b,2\}$. Dann veranschaulichen wir uns das kartesische Produkt X x Y so:




oder so:



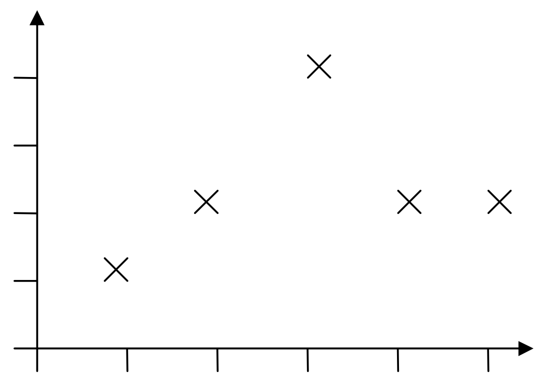

## 2.2. Abbildungen

Die Idee einer Abbildung ist der Vergleich von Mengen.

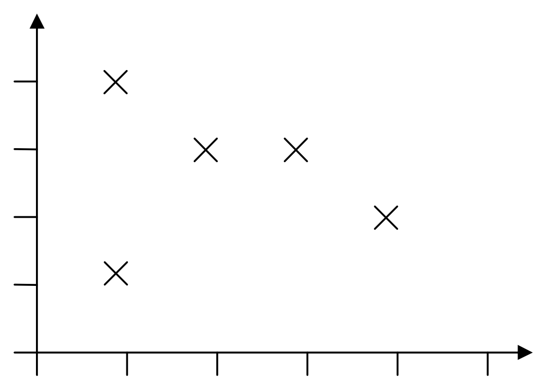
**Graph einer Abbildung**. Die Teilmenge $\Gamma \subseteq X \times Y$, definiert als

$\Gamma = \{(x,y) \in X \times Y \mid$ zu jedem x existiert genau ein y, sodass $(x,y) \in \Gamma\}$

heißt ein *Graph* einer Abbildung.



ist Graph einer Abbildung. Aber



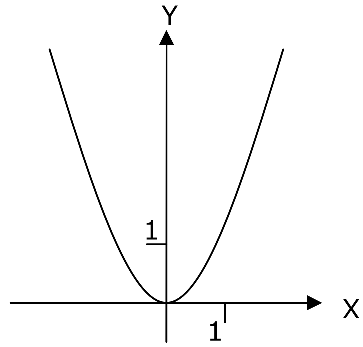
ist kein Graph einer Abbildung.

Ist $\Gamma$ der Graph einer Abbildung, so schreibe $f(x) = y$, falls $(x,y) \in \Gamma$. Dann gehört zu $\Gamma$ die Abbildung

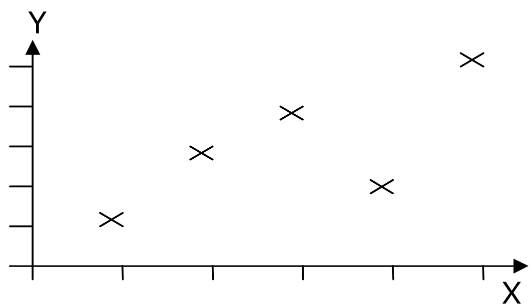
$$f: X \to Y, x \to y = f(x).$$

Eine *Abbildung* ist eine Zuordnung, die jedem $x \in X$ genau ein $y = f(x) \in Y$ zuordnet.

**Beispiel.** 1. Die Zuordnung f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^2$ hat den Graph




2.

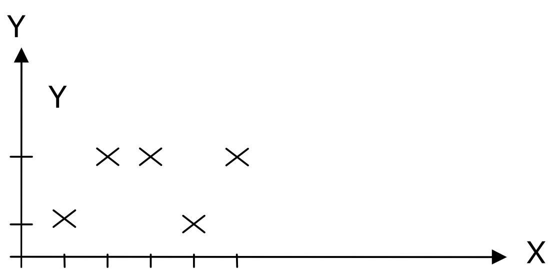



Die Abbildung hierzu erfüllt

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

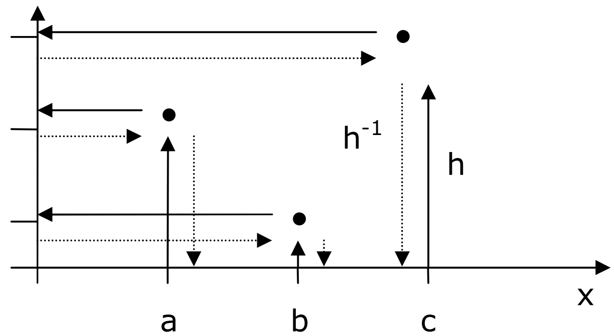
Solche Abbildungen f heißen *injektiv.*

3.




Hier existiert für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $g(x) = y$. Die Abbildung g heißt daher *surjektiv.*

4.




H ist injektiv und surjektiv und heißt daher *bijektiv* oder *Bijektion.* In diesem Fall existiert die Umkehrabbildung

$$h^{-1} : Y \to X,\ y=h(x) \to x.$$

Das x existiert (da h surjektiv) und ist eindeutig (da h injektiv).

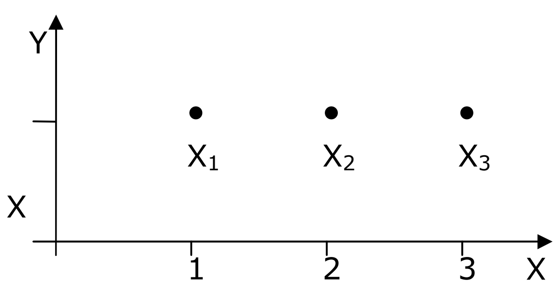
**Definition.** Existiert zwischen Mengen X und Y eine Bijektion f: $X \to Y$, so heißen X und Y *gleichmächtig*. Jede Menge X mit einer Bijektion

$$X \to \{1,2,3,\ldots\ldots,n\}$$

hat die Kardinalität card(X) = n = #X = |X|. Vereinbare card($\emptyset$) = 0.

Etwa das Beispiel $\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$ zeigt, dass card{a,b,c} = 3, da hier $a \neq b$,

$a \neq c$, $b \neq c$ gilt.




Sei $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, $x_3 = f(3)$. Hier gilt

card{ $x_1, x_2, x_3$} = card{x} = 1.

**Identität.** Die identische Abbildung ist

$$id_x : x \mapsto x\ ,\ x \mapsto x.$$

Mehrere Abbildungen können verkettet werden:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[loop left, "f"] \arrow[r, "g"] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "j"'] & Z \arrow[d, "i"] \\
& & W
\end{tikzcd}$$

**Verkettung.** Seien $g: X \to Y$ und $h: Y \to Z$ Abbildungen. Dann ist

$$h \circ g: X \to Z\ ,\ x \mapsto h(g(x)),$$

die *Verkettung* von h und g.

Ist $j = i \circ h$ eine Verkettung von Abbildungen, so sagen wir, dass das folgende Diagramm *kommutiert*.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "j"'] & Z \arrow[d, "i"] \\
& W
\end{tikzcd}$$

**Bemerkung.** Seien $g: X \to Y$, $h: Y \to Z$ und $i: Z \to W$ Abbildungen. Dann gilt:

1. $g \circ id_X = g$.
2. $id_Y \circ g = g$.
3. $i \circ (h \circ g) = (i \circ h) \circ g$.

Mit Abbildungen kann also in gewisser Weise Arithmetik betrieben werden.