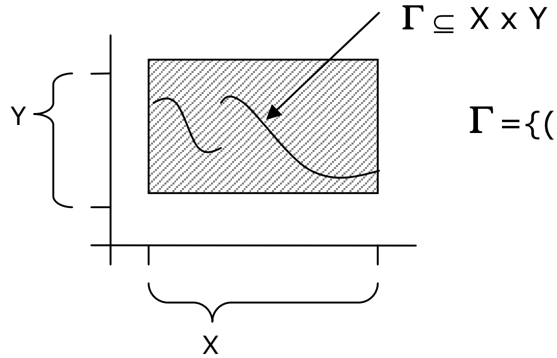
3. Relationen

Im vorigen Abschnitt behandelten wir den Graph einer Abbildung $f: X \to Y$.

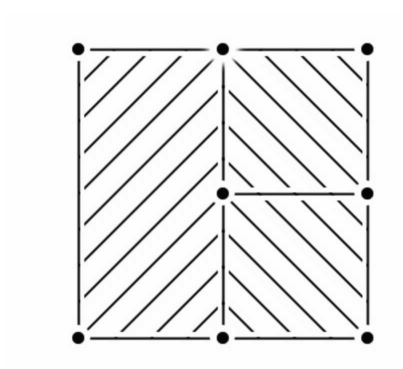


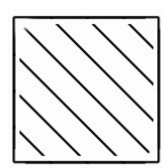
$$\Gamma = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

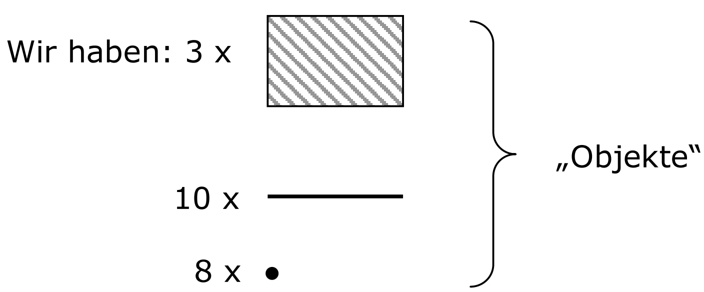
Der Graph drückt eine „Beziehung“ zwischen x und $y = f(x)$ aus. Dies können wir verallgemeinern:

Definition. Eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ heißt eine *Relation*. Falls $X = Y$, also $R \subseteq X^2$, so heißt R eine *Relation auf X*.

Beispiel. Sei eine ebene Fläche wie folgt partitioniert:



X=  eine ebene Fläche,



So bekommen wir eine Relation auf X: $x \sim y \Leftrightarrow$ x und y sind Element desselben Objekts. Genauer:

$$\sim \; := \{(x,y) \in X^2 \mid x \text{ und } y \text{ liegen im selben Objekt}\}.$$

Schreibweise. Statt $(x,y) \in R$ schreibt man oft $x\,R\,y$. Im Beispiel schreiben wir demnach alternativ $x \sim y$ statt $(x,y) \in \sim$.

Beobachtung.

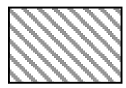
1. Für jedes $x \in X$ ist $x \sim x$, d.h. $\sim$ ist *reflexiv*.

2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, d.h. $\sim$ ist *symmetrisch*.

3. $x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$, d.h. $\sim$ ist *transitiv*.

Definiton. Eine Relation R auf einer Menge X heißt *Äquivalenzrelation*, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiel.

a) $\sim$ ist Äquivalenzrelation auf X =  .

b) = ist Äquivalenzrelation auf jeder Menge M. Dabei bedeutet = die Relation $\{(x,x) \mid x \in M\}$.

c) Sei $\mathscr{A}$ eine Menge von Aussagen. Dann ist $\Leftrightarrow$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{A}$.

Betrachten wir wieder das erste Beispiel. Durch die Partitionierung bekommen wir eine Abbildung

$$\underbrace{X}_{\text{unendlich}} \to \underbrace{\text{Menge der Objekte}}_{\text{endlich}} =: \overline{X}, \ x \mapsto \text{das Objekt, welches } x \text{ enthält.}$$

Dies bedeutet eine erhebliche Datenreduktion!

Definition. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Dann heißt für $x \in M$

$$[x] := \{ y \in M \mid y \sqcup x \}$$

die *Klasse* von x. Die Menge aller Klassen

$$\overline{M} := \{ [x] \mid x \in M \}$$

Heißt die *Quotientenmenge*.

Auf diese Weise bekommen wir allgemein eine Abbildung

$$\pi : \overline{M} \to M, \ x \mapsto [x].$$

Bemerkung.

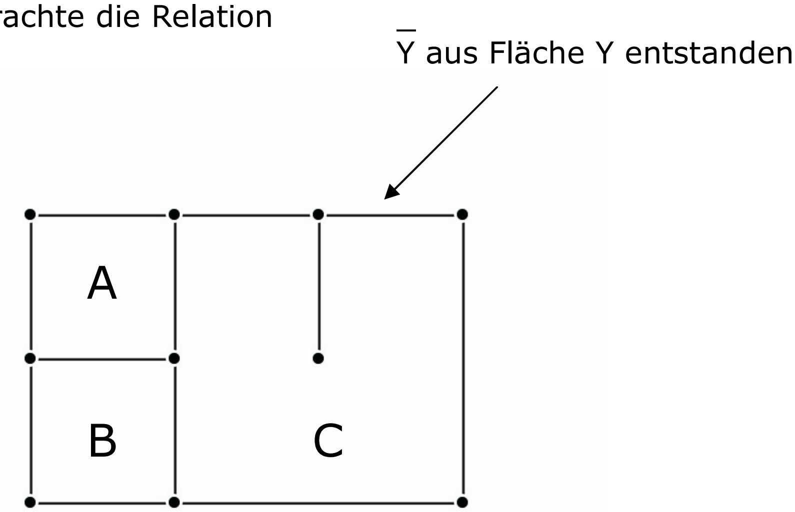
1. π ist surjektiv.

2. Entweder ist $[x] \cap [y] = \varnothing$ oder $[x] = [y]$:

   $z \in [x] \cap [y] \Rightarrow z \sim x \wedge z \sim y \Rightarrow x \sim z \wedge z \sim y \Rightarrow x \sim y$.

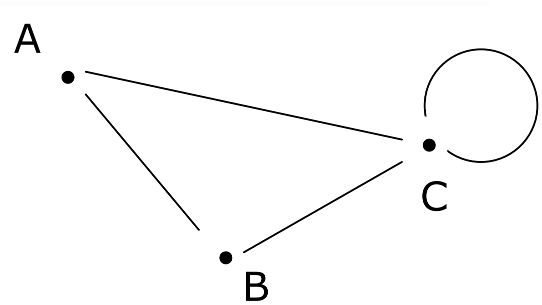
3. M ist die Vereinigung aller Klassen von Elementen aus M.

Beispiel. Betrachte die Relation



Relation auf F: F *adjazent* zu F', falls F und F' durch ein Linienobjekt benachbart sind.

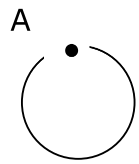
Der *Graph zur Relation* ist in diesem Beispiel:



Er drückt die „Nachbarschaftsbeziehungen" zwischen den Flächen aus und heißt der *Adjazenzgraph*.

1. Ist Adjazenz auf F reflexiv ?

   - Nein, etwa A ist nicht mit sich selbst durch eine Schleife verbunden:

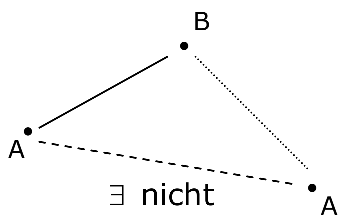


2. Ist Adjazenz auf F symmetrisch ?

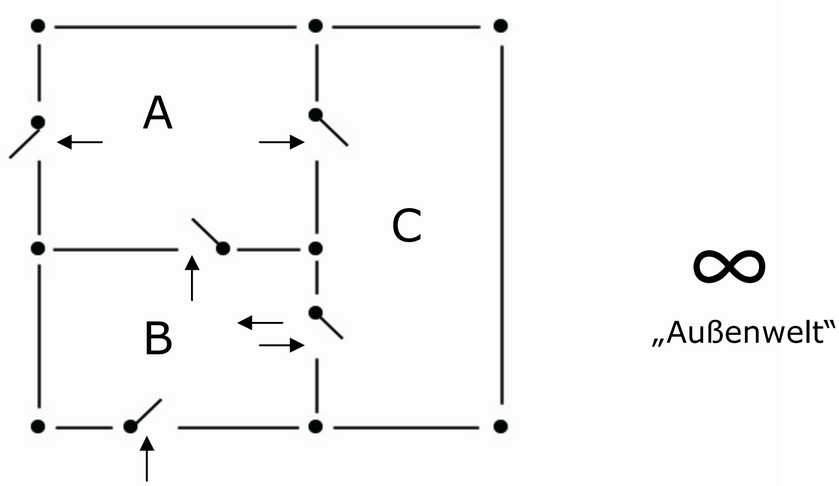
   - Ja.

3. Ist Adjazenz auf F transitiv ?

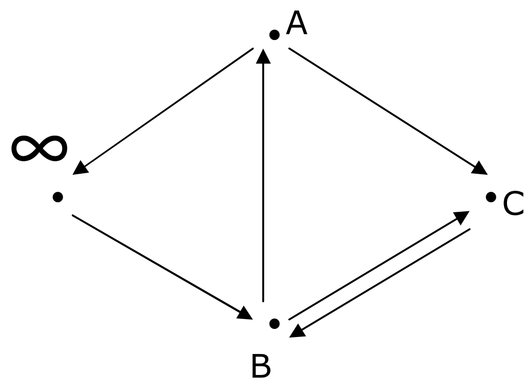
   - Nein. Z.B. existiert folgende Verbindung nicht:



Beispiel. Es gibt Türen, die nur in einer Richtung öffnen:



Der Graph zu dieser Art von Flächenadjazenzrelation sieht wie folgt aus:



Die Relation ist:

- nicht reflexiv.
- nicht symmetrisch.
- nicht transitiv.

Gibt es von jeder der Flächen A, B, C einen (gerichteten) Weg nach ∞ ?

$$\left.\begin{array}{l} A \to \infty \\ B \to A \to \infty \\ C \to B \to A \to \infty \end{array}\right\} \text{ Ja.}$$

Verketten.

Gegeben seien Relationen $R \subseteq X \times Y$ sowie $S \subseteq Y \times Z$. Dies veranschaulichen wir so:

$$x \xrightarrow{R} y\,, \qquad y \xrightarrow{S} z$$

Dann gibt es einen „direkten Weg“: $S \circ R$: $x \to z$.

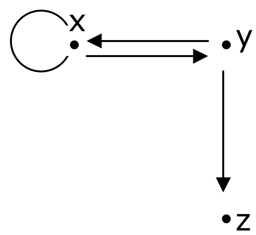
Definition. Die Relation

$$S \circ R = \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \text{ mit } x\,R\,y \text{ und } y\,S\,z\}$$

heißt die *Verkettung* von R und S.

Beispiel. Die Relation R sei durch folgenden Graph gegeben:

R:



Dann ist $R^2 = R \circ R$: