

Mathematik für Architekten — Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Für Teilmengen A und B von \mathbb{Z} sei folgende Verknüpfung gegeben:

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A \cdot B := \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$$

Zum Beispiel ist

$$\{3, 7\} + \{2, 3\} = \{3 + 2, 7 + 2, 3 + 3, 7 + 3\} = \{5, 9, 6, 10\}$$

$$\{2\} \cdot \{3, 5, 7\} = \{2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7\} = \{6, 10, 14\}$$

1. Welche der folgenden Mengen sind gleich? Gib jeweils zwei Elemente an.

(a) $6\mathbb{Z} := \{6\} \cdot \mathbb{Z}$

(b) $6\mathbb{Z} \cdot 6\mathbb{Z}$

(c) $\{2\} + 6\mathbb{Z}$

(d) $(\{3\} + 6\mathbb{Z}) + (\{5\} + 6\mathbb{Z})$

(e) $\{8\} + 6\mathbb{Z}$

(f) $(\{2\} + 6\mathbb{Z}) \cdot (\{4\} + 6\mathbb{Z})$

2. Wie viele Elemente hat die Menge

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} := \{\{x\} + 6\mathbb{Z} \mid x \in 6\mathbb{Z}\} \quad (\text{sprich: „}\mathbb{Z} \text{ modulo } 6\mathbb{Z}\text{“})$$

3. Zeige: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ bildet mit $+$ eine abelsche Gruppe. Was ist das neutrale Element?

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Auf der Menge $\mathcal{B} := \{\text{wahr, falsch}\}$ kennen wir bereits die Verknüpfungen \wedge , \vee , \Leftrightarrow und \Rightarrow .

1. Für welche dieser Verknüpfungen hat \mathcal{B} ein zugehöriges neutrales Element? Gib dieses jeweils an.

2. Bildet \mathcal{B} mit diesen Verknüpfungen jeweils eine abelsche Gruppe?

3. Die Verknüpfung \nleftrightarrow sei definiert als

$$X \nleftrightarrow Y := \neg(X \Leftrightarrow Y)$$

Zeige: \mathcal{B} bildet mit \nleftrightarrow eine abelsche Gruppe. Was ist das neutrale Element?

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Für zwei Mengen A und B sei

$$\text{Abb}(A, B) := \{f : A \rightarrow B\}$$

die Menge aller Abbildungen von A nach B .

Für $f, g \in \text{Abb}(A, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ seien folgende Abbildungen definiert:

$$f + g : A \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$\lambda \cdot g : A \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \lambda \cdot g(x)$$

Zeige: $\text{Abb}(A, \mathbb{R})$ bildet mit diesen Verknüpfungen einen Vektorraum.

Abgabe der Übungsblätter. Diesmal ist die Abgabe am Freitag, den 13. Mai in der Vorlesung.