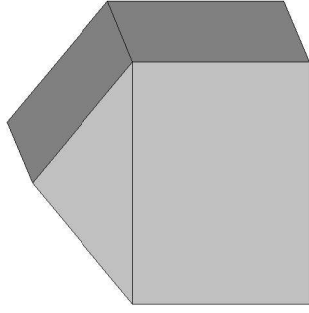
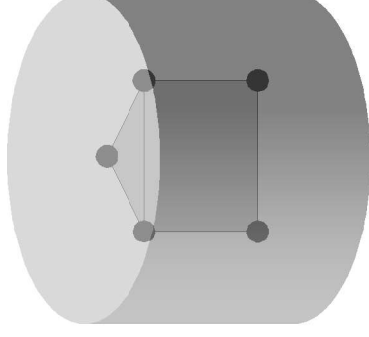


Relationale Datenbanken für die Topologie architektonischer Räume



Arch

Funktor 



DTop

Norbert Paul + Patrick Erik Bradley



gefördert durch



Deutsche
Forschungsgemeinschaft



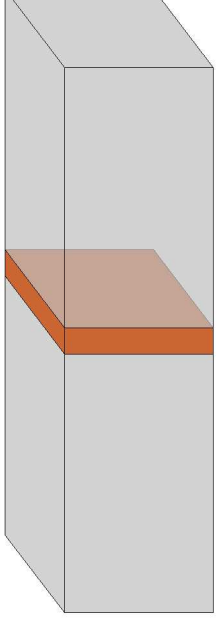
Institut für Industrielle Bauproduktion
Prof. Dr. N. Kohler
Universität Karlsruhe (TH)

- topologische Eigenschaften der Architektur für die Datenhaltung und Datenmodellierung ausnützen.
- Allgemeines Bezugsmodell für topologische Informationen bereitstellen.
- Nutzen:
 - Versionkontrolle bei kooperativer räumlicher Planung
 - Verbindung von räumlichen Modellen und Raum-Zeit-Modellen
 - Integration verschiedener Detaillierungsstufen wie etwa Skizze-Werkplan
 - Analyse topologischer Eigenschaften wie etwa Wegebeziehungen
 - Bauteildatenbanken

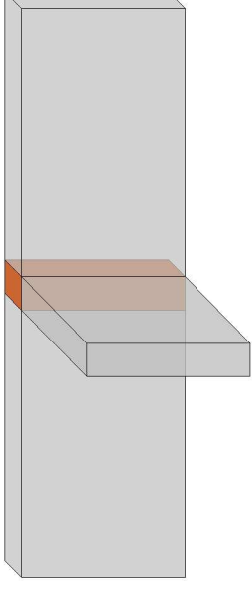
Beispiele topologischer Eigenschaften

Topologische Datenbanken

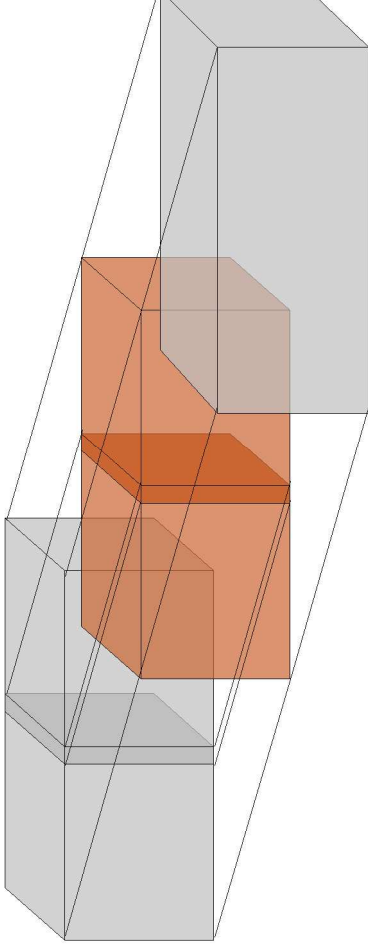
- Wand berührt „Räume“



- Kante berührt Wände

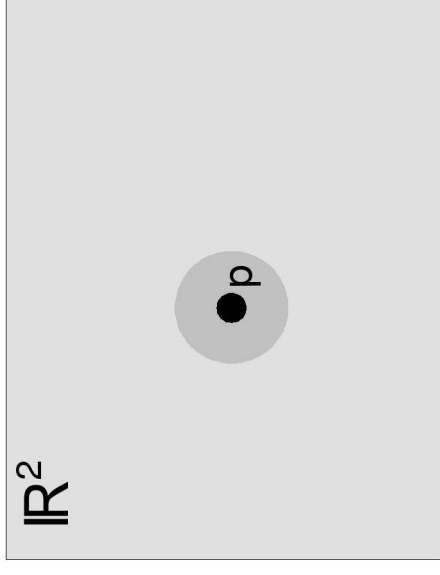


- Änderung berührt Alt - Neu

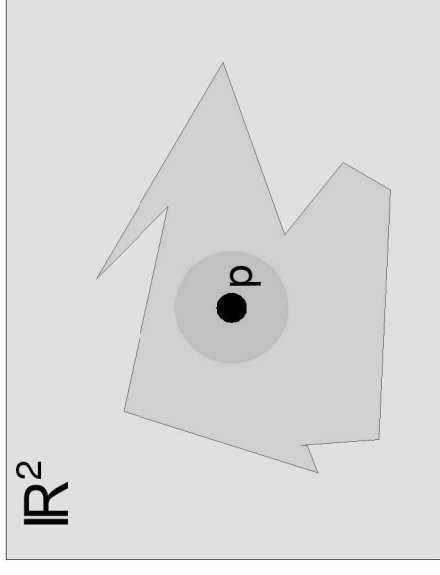


Norbert Paul + Patrick Erik Bradley

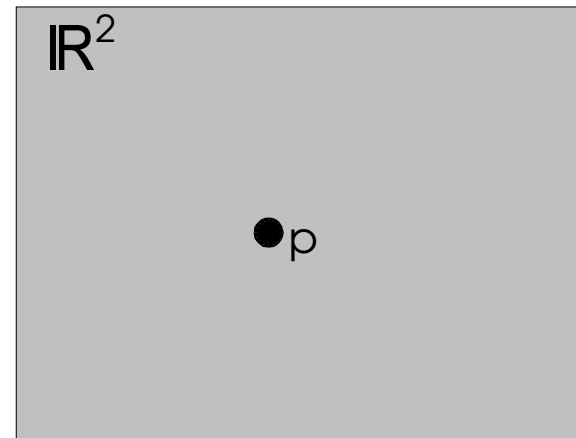
- Strukturierung einer Menge X durch Definition von Umgebungen für ihre Punkte
- Beispiel: zweidimensionaler reeller Vektorraum $X := \mathbb{R}^2$:
 - Umgebung eines Punktes p ist:
 - Jede Scheibe um p mit Radius $r > 0$



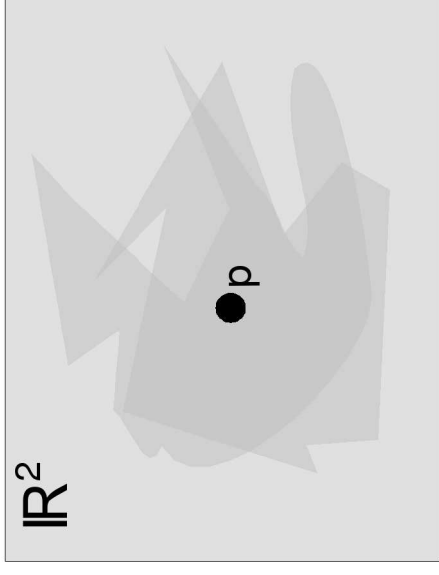
- Strukturierung einer Menge X durch Definition von Umgebungen für ihre Punkte
- Beispiel: zweidimensionaler reeller Vektorraum $X := \mathbb{R}^2$:
 - Umgebung eines Punktes p ist:
 - Jede Scheibe um p mit Radius $r > 0$
 - Jede Obermenge einer Umgebung von p



- Strukturierung einer Menge X durch Definition von Umgebungen für ihre Punkte
- Beispiel: zweidimensionaler reeller Vektorraum $X := \mathbb{R}^2$:
 - Umgebung eines Punktes p ist:
 - Jede Scheibe um p mit Radius $r > 0$
 - Jede Obermenge einer Umgebung von p
 - X selbst



- Strukturierung einer Menge X durch Definition von Umgebungen für ihre Punkte
- Beispiel: zweidimensionaler reeller Vektorraum \mathbb{R}^2 :
 - Umgebung eines Punktes p sei:
 - Jede Scheibe um p mit Radius $r > 0$
 - Jede Obermenge einer solchen Scheibe
 - X selbst
 - offene Menge:
 - Teilmenge von X , die Umgebung aller ihrer Punkte ist.
 - insbesondere \emptyset und X .

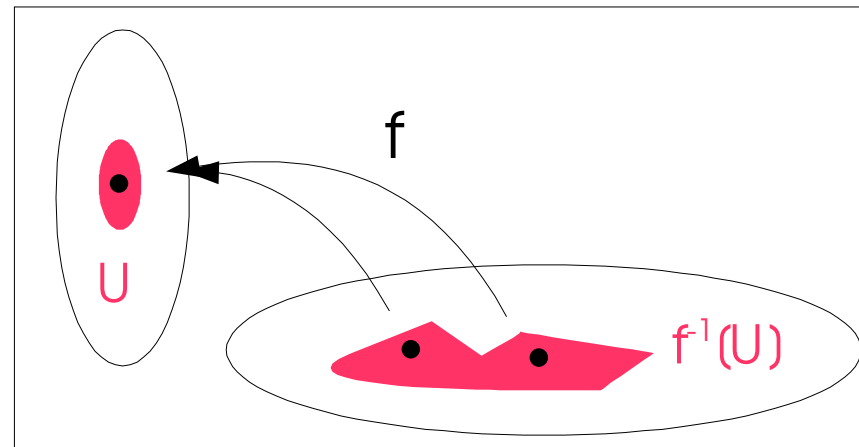
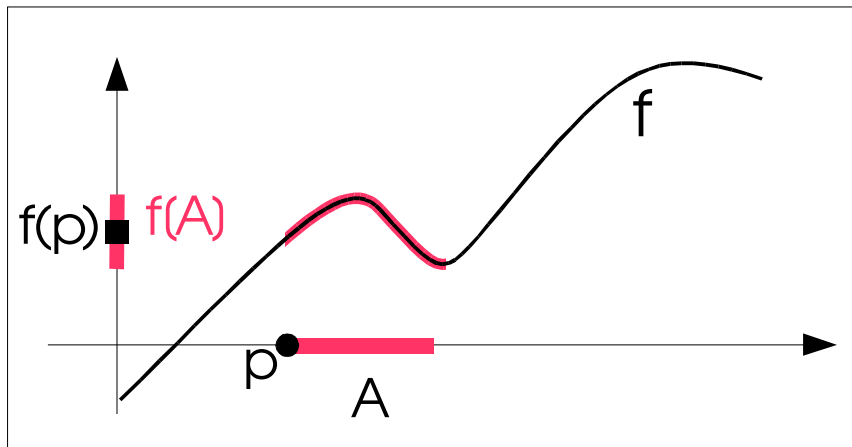


Topologie:

- Menge von offenen Teilmengen von X
- Obiges Beispiel ergibt die „natürliche Topologie des \mathbb{R}^2 “

- Definition von Topologie
 - Für eine Menge X – die Punktmenge – Festlegung eines Mengensystems T_X von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:
 - (T1) $\emptyset \in T_X$ und $X \in T_X$
 - (T2) Wenn $A, B \in T_X$ dann auch $A \cap B \in T_X$
 - (T3) Wenn $S \subseteq T_X$ dann auch $\bigcup_{A \in S} A \in T_X$
 - T_X heißt dann **eine Topologie für X** .
 - (X, T_X) heißt **topologischer Raum**.
 - Eine Menge $A \in T_X$ heißt **offen** in (X, T_X) .
- Beispiele:
 - $(X, \{\emptyset, X\})$ – der triviale Raum
 - $(X, \wp(X))$ – der diskrete Raum ($\wp(X)$ ist Potenzmenge von X)
 - $(\{0, 1\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\})$ – der Sierpinski-Raum

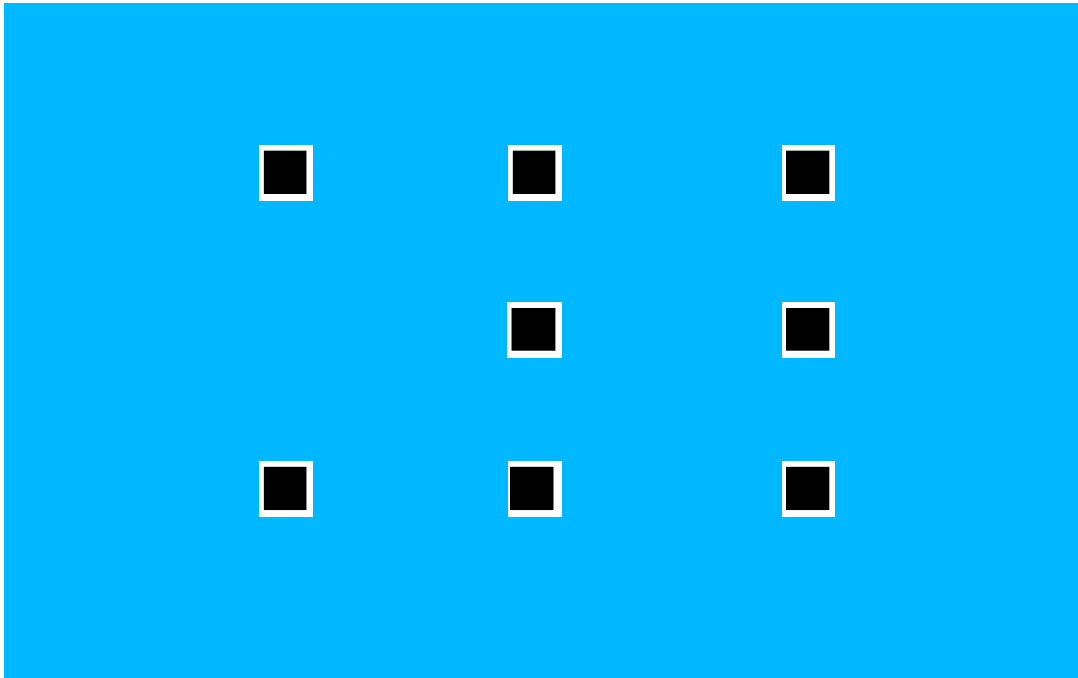
- Analysis: δ - ε -Kriterium:
 - Äquivalent: Bild eines Berührungspunktes einer Menge berührt die Bildmenge.
 - Äquivalent: Urbild eines offenen Intervalls ist Vereinigung offener Intervalle
- Topologie:
 - Verallgemeinerung: Urbild einer offenen Menge ist offen.



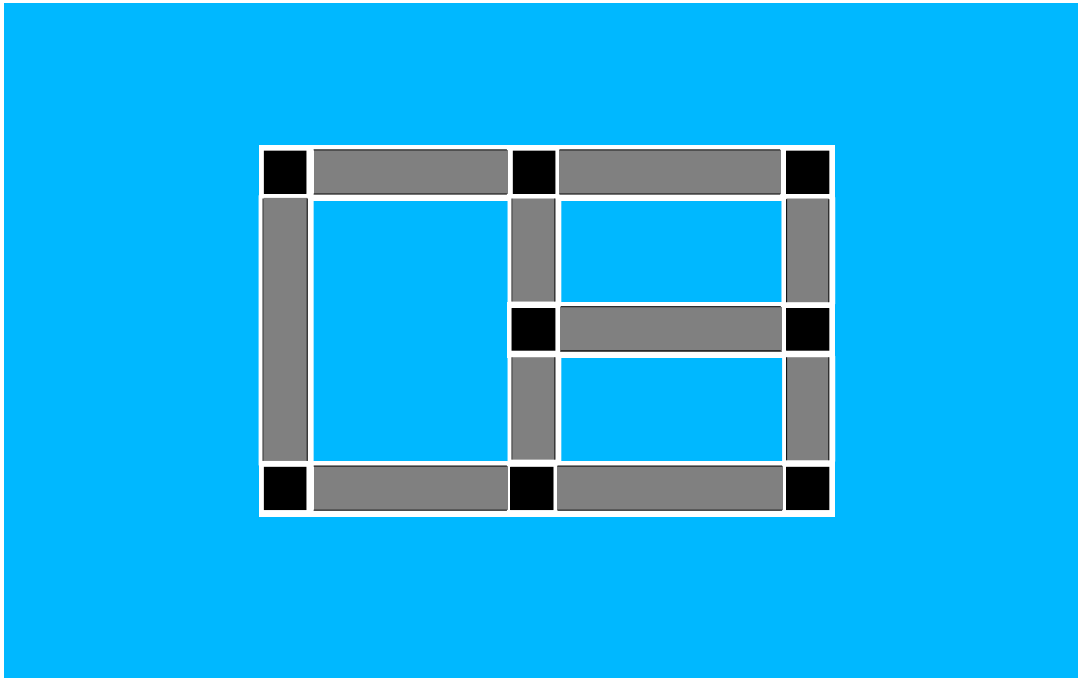
- Zerlegung von \mathbb{R}^n (hier $n=2$) mit seiner natürlichen Topologie (die uns zu fein ist)



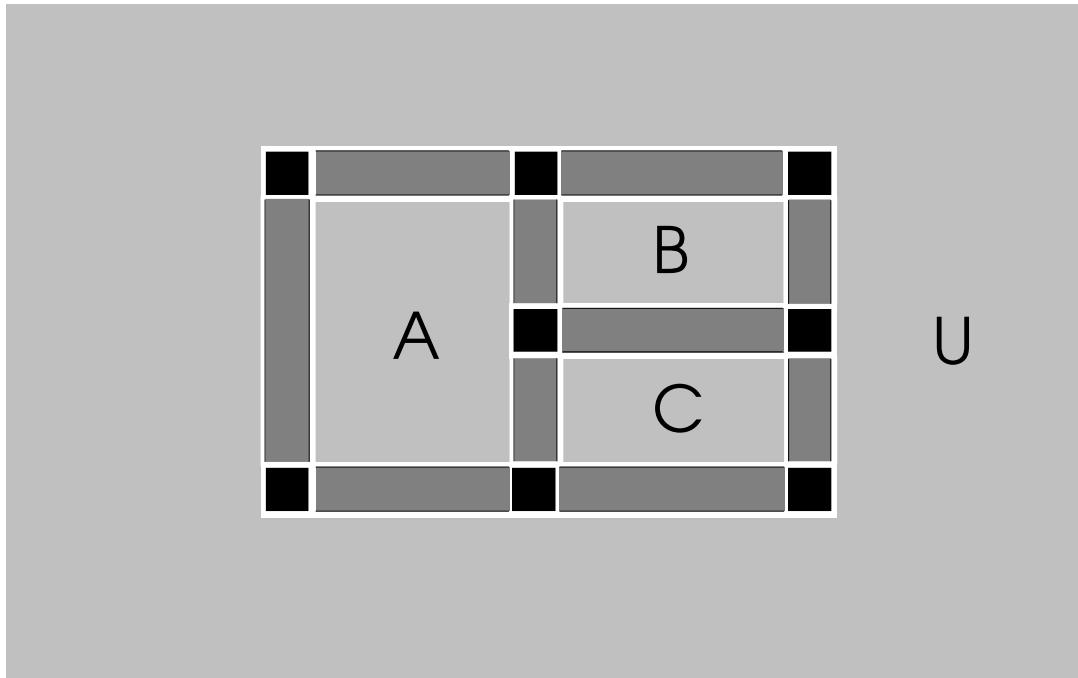
- Zerlegung von \mathbb{R}^n (hier $n=2$) mit seiner natürlichen Topologie in
 - Eckpunkte



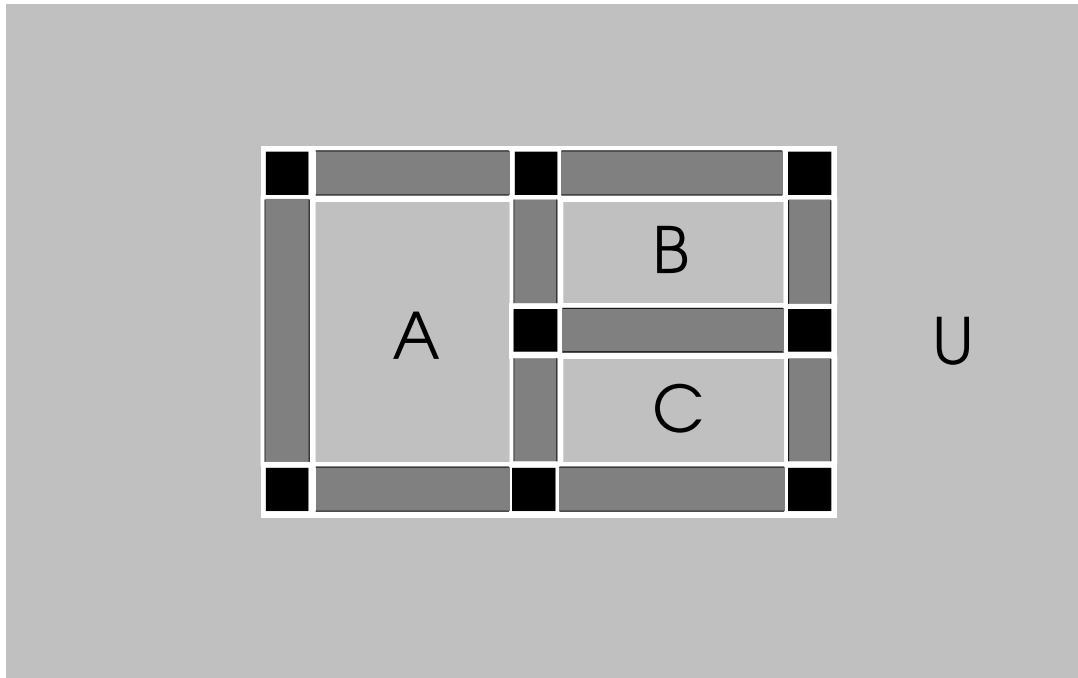
- Zerlegung von \mathbb{R}^n (hier $n=2$) mit seiner natürlichen Topologie in
 - Eckpunkte --- Kanten



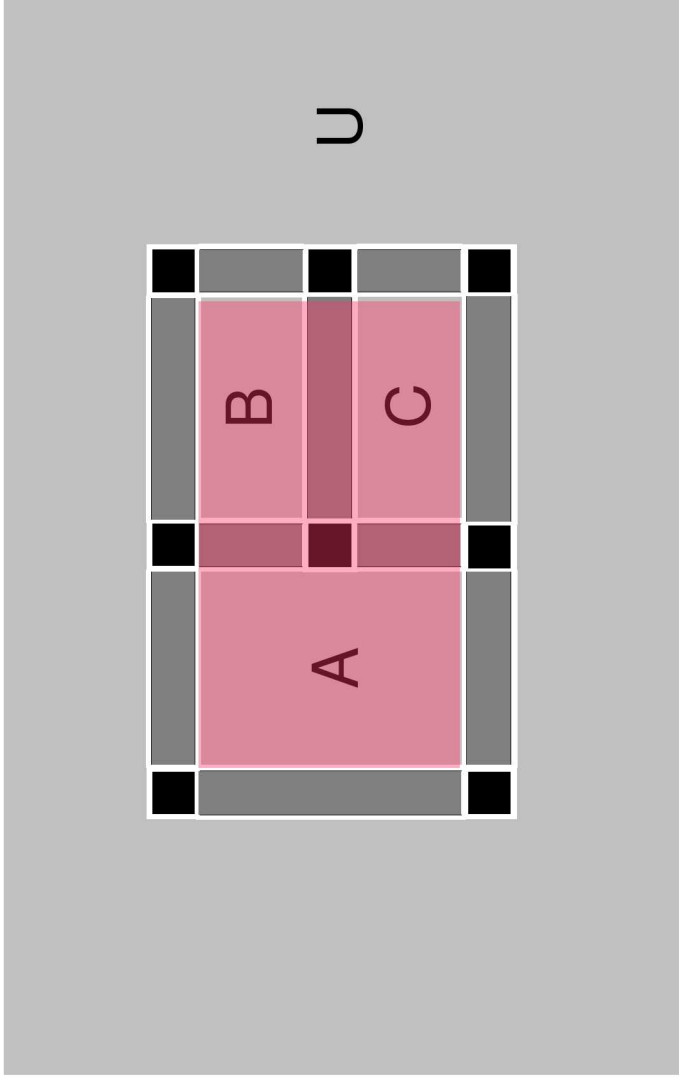
- Zerlegung von \mathbb{R}^n (hier $n=2$) mit seiner natürlichen Topologie in
 - Eckpunkte --- Kanten --- Flächen



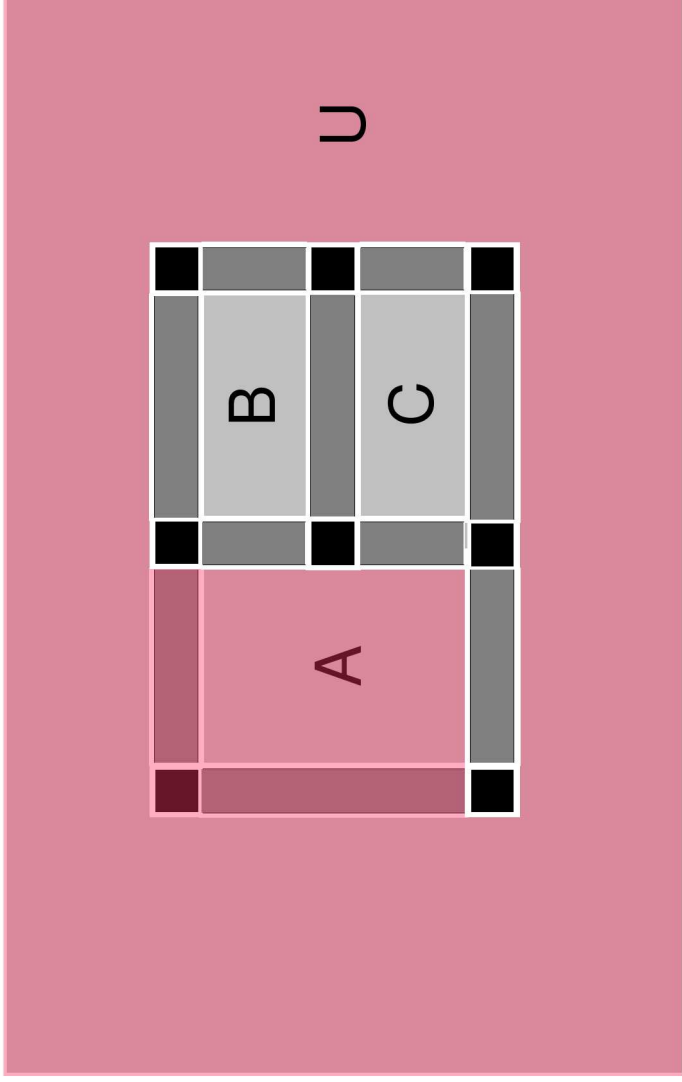
- Zerlegung von \mathbb{R}^n (hier $n=2$) mit seiner natürlichen Topologie in
 - Eckpunkte --- Kanten --- Flächen
 - ergibt eine Topologie für die Komponenten, die Quotiententopologie



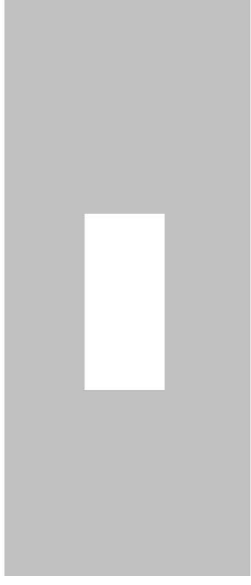
- Zerlegung von \mathbb{R}^n (hier $n=2$) mit seiner natürlichen Topologie in
 - Eckpunkte --- Kanten --- Flächen
 - ergibt eine Topologie für die Komponenten, die Quotiententopologie



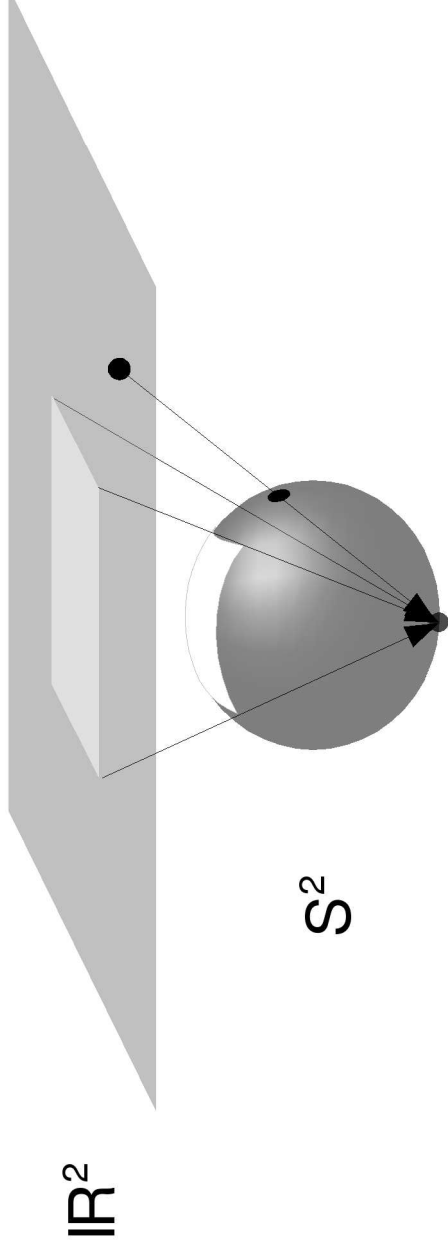
- Zerlegung von \mathbb{R}^n (hier $n=2$) mit seiner natürlichen Topologie in
 - Eckpunkte --- Kanten --- Flächen
 - ergibt eine Topologie für die Menge der Komponenten, die Quotiententopologie



- Der Aussenraum ist keine Zelle — er hat ein Loch

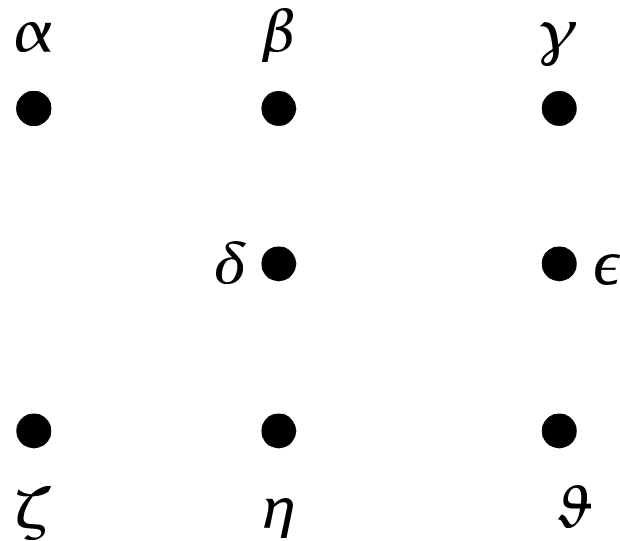


- Lösung: Kompaktifizierung (z.B. zur Sphäre S^2):

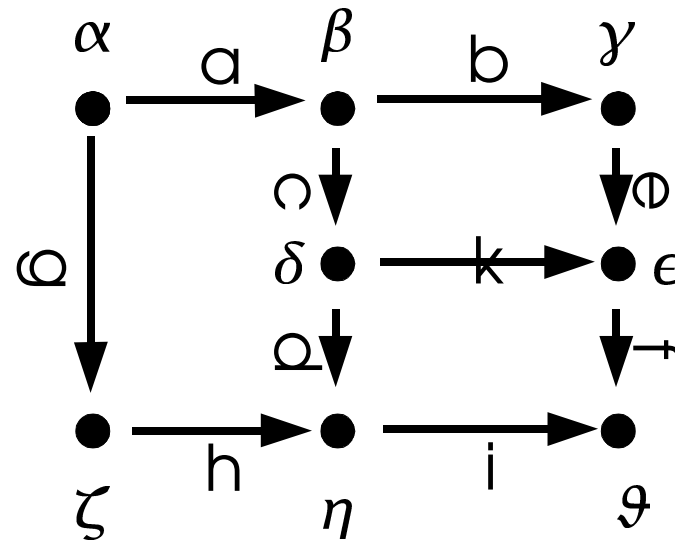


- Postulat 1 (Zerlegung des \mathbb{R}^n):
 - Gegeben: ein kompakter Teilraum X des \mathbb{R}^n für ein festes n
 - Architektur ist immer auch eine Zerlegung von X in endlich viele Teile
 - Den dadurch entstehenden topologischen Raum bezeichnen wir als eine **architektonische Zerlegung des \mathbb{R}^n** .
- Postulat 2 (Verfeinerung als Komplex):
 - Gegeben: eine architektonische Zerlegung.
 - Diese lässt sich zu einem Komplex verfeinern.
 - Dieser wiederum zu einem Zellenkomplex.
 - Diese Komplexe bezeichnen wir als **architektonische Komplexe**.

- Aufbau aus orientierten Zellen:
 - 0-Zellen ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \vartheta$)

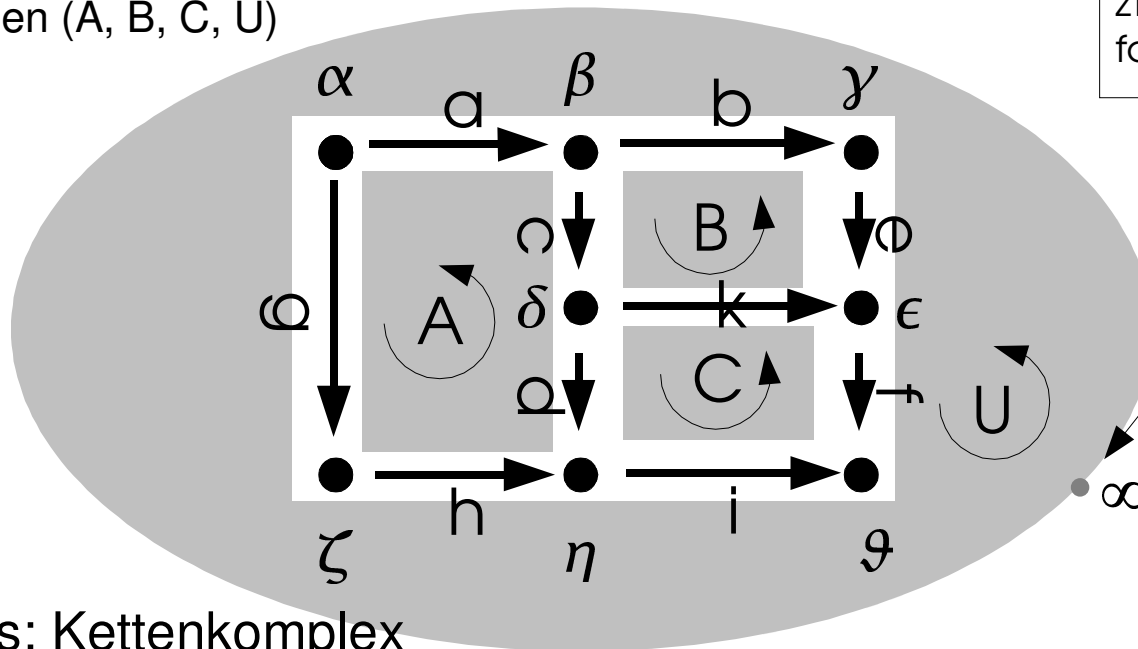


- Aufbau aus orientierten Zellen:
 - 0-Zellen ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \vartheta$)
 - 1-Zellen (a, b, c, d, e, f, g, h, i, k)



- Aufbau aus orientierten Zellen:

- 0-Zellen ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \vartheta$)
- 1-Zellen ($a, b, c, d, e, f, g, h, i, k$)
- 2-Zellen (A, B, C, U)

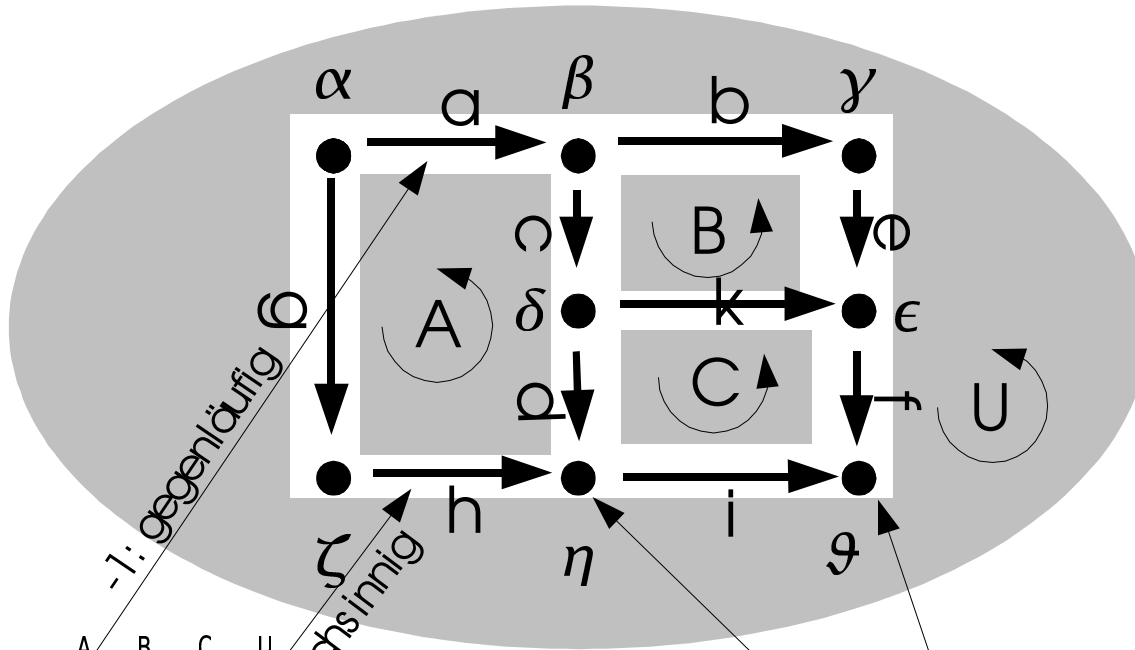


Durch Kompaktifizierung wird U ebenfalls zur Zelle.

- Ergebnis: Kettenkomplex

$$\mathbb{Z}\{A, B, C, U\} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}\{a, b, \dots, k\} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}\{\alpha, \beta, \dots, \vartheta\}$$

mit $\partial \circ \partial = 0$ ← Wichtig !!!



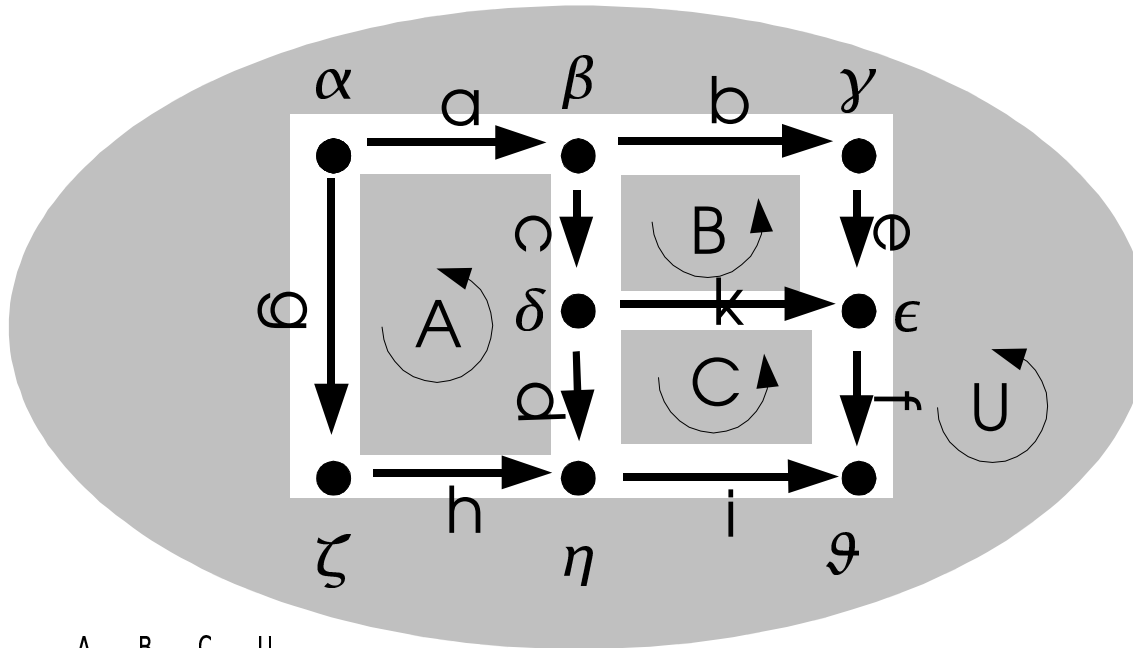
$D_2 =$

	A	B	C	U
a	-1	0	0	1
b	0	-1	0	0
c	-1	1	0	0
d	-1	0	1	0
e	0	-1	0	1
f	0	0	-1	1
g	1	0	0	-1
h	1	0	0	-1
i	0	0	1	-1
k	0	1	-1	0

$D_1 =$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k
alpha	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
beta	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
gamma	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0
delta	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	-1
epsilon	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	1
zeta	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
eta	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	0
theta	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0

-1: gegenläufig
1: gleichsinnig



X	Y	a
A	a	-1
A	c	-1
A	d	-1
A	g	1
A	h	1
B	b	-1
B	c	1
B	e	-1
B	k	1
C	d	1
C	f	-1
C	i	1
C	k	-1
a	alpha	-1
a	beta	1
b	beta	-1
b	gamma	1
c	beta	-1
c	delta	1
d	delta	-1
d	eta	1
e	gamma	-1
e	epsilon	1
f	epsilon	-1
f	theta	1
g	alpha	-1
g	zeta	1
h	zeta	-1
h	eta	1
i	eta	-1
i	theta	1
k	delta	-1

$$D_2 =$$

	A	B	C	U
a	-1			1
b		-1		1
c	-1	1		
d	-1		1	
e		-1		1
f			-1	1
g	1			-1
h	1			-1
i			1	-1
k		1	-1	

$$D_1 =$$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k
alpha	-1						-1			
beta	1	-1	-1							
gamma		1			-1					
delta			1	-1						-1
epsilon					1	-1				1
zeta							1	-1		
eta				1				1	-1	
theta						1			1	

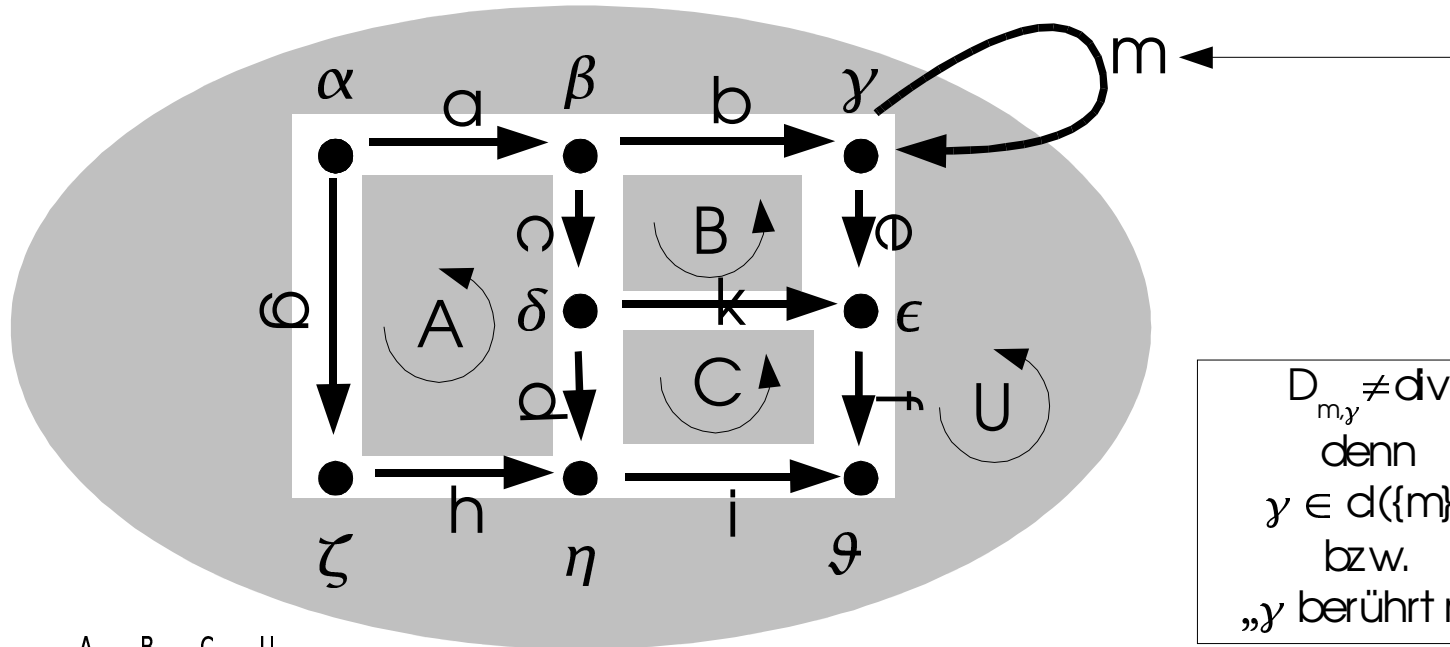
Wichtig:

$D_1 \cdot D_2$ ist partielle 0-Matrix

ifib

Institut für Industrielle Bauproduktion
 Prof. Dr. N. Kohler
 Universität Karlsruhe (TH)

Die partiellen Randmatritzen mit expliziter Null

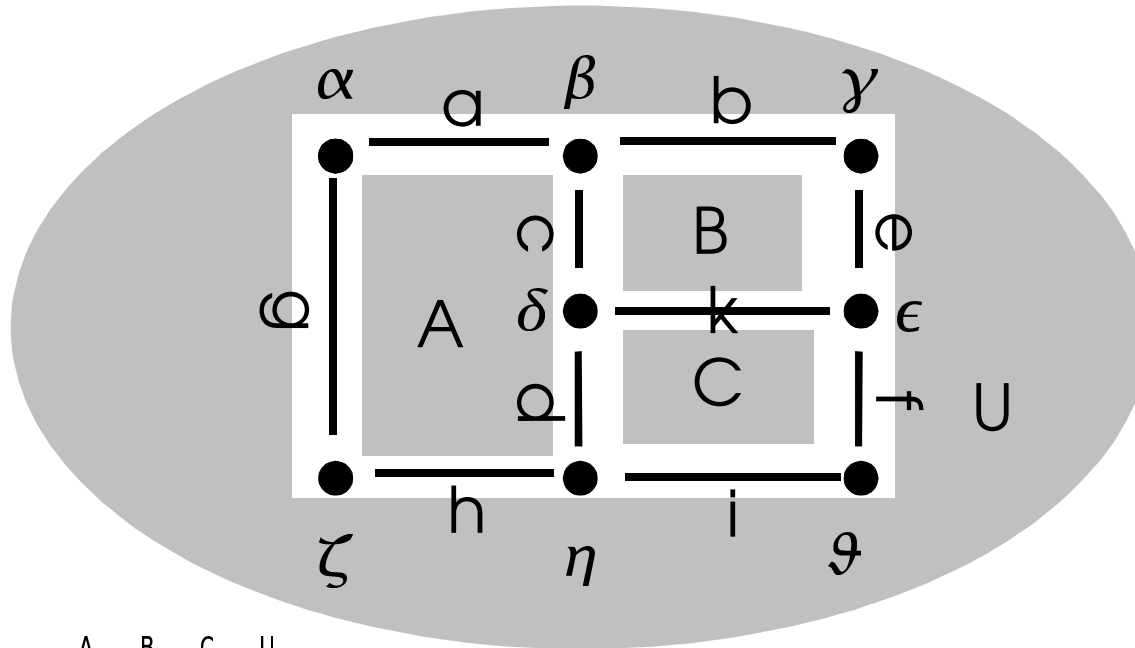


$D_2 =$

	A	B	C	U
a	-1			1
b		-1		1
c	-1	1		
d	-1		1	
e		-1		1
f			-1	1
g	1			-1
h	1			-1
i			1	-1
k		1	-1	

$D_1 =$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	m
α	-1						-1				
β	1	-1	-1								
γ		1			-1						0
δ			1	-1						-1	
ϵ					1	-1				1	
ζ							1	-1			
η				1				1	-1		
ϑ						1			1		

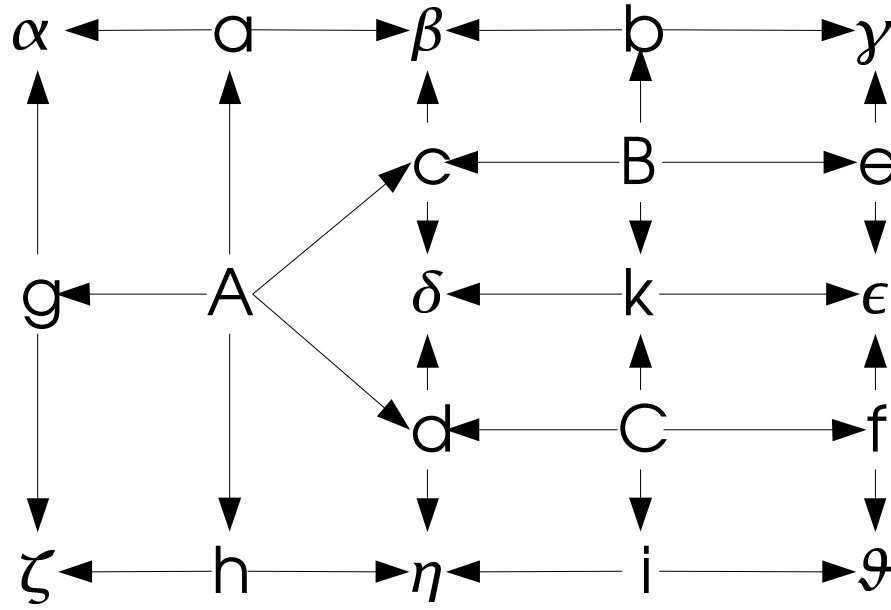


	A	B	C	U
a	x			x
b		x		x
c	x	x		
d	x		x	
e		x		x
f			x	x
g	x			x
h	x			x
i			x	x
k		x	x	

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k
α	x						x			
β	x	x	x							
γ		x			x					
δ			x	x						x
ϵ					x	x				x
ζ							x	x		
η				x				x	x	
θ						x			x	

Die Randrelation in \mathcal{DTop}

Jeder endliche topologische Raum kann verlustfrei durch eine derartige Relation beschrieben werden.



	A	B	C
a	x		
b		x	
c	x	x	
d	x		x
e		x	
f			x
g	x		
h	x		
i			x
k		x	x

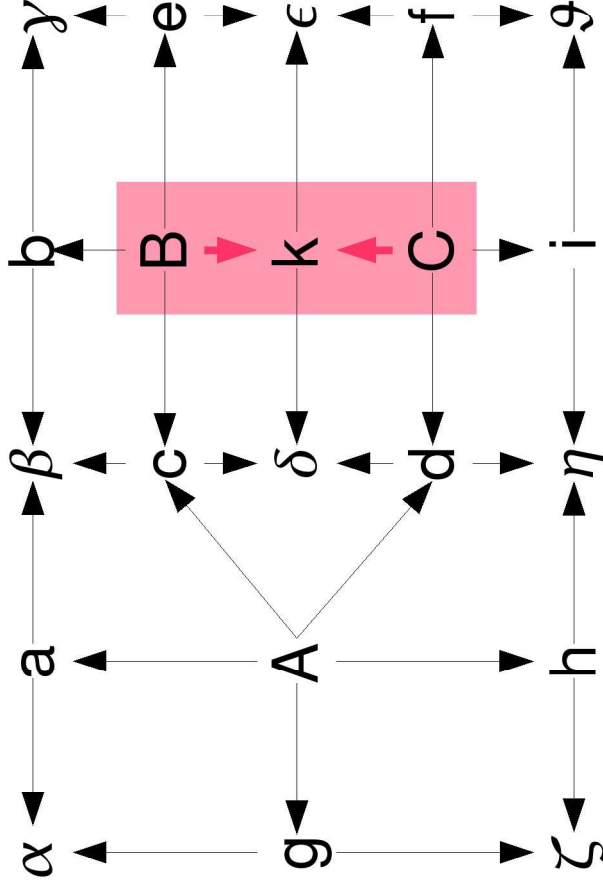
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k
alpha	x						x			
beta	x	x	x							
gamma		x			x					
delta			x	x						x
epsilon					x	x				x
zeta							x	x		
eta				x				x	x	
theta						x			x	

Topologische Datenbanken

- A → a
- A → c
- A → d
- A → g
- A → h
- B → b
- B → c
- B → e
- B → k
- C → d
- C → f
- C → i
- C → k
- a → alpha
- a → beta
- b → beta
- b → gamma
- c → beta
- c → delta
- d → delta
- d → eta
- e → gamma
- e → epsilon
- f → epsilon
- f → theta
- g → alpha
- g → zeta
- h → zeta
- h → eta
- i → eta
- i → theta
- k → delta
- k → epsilon

Offene Mengen in $\mathcal{D}Top$

Charakteristik:
Kein Pfeil geht
von aussen in die
Menge hinein.



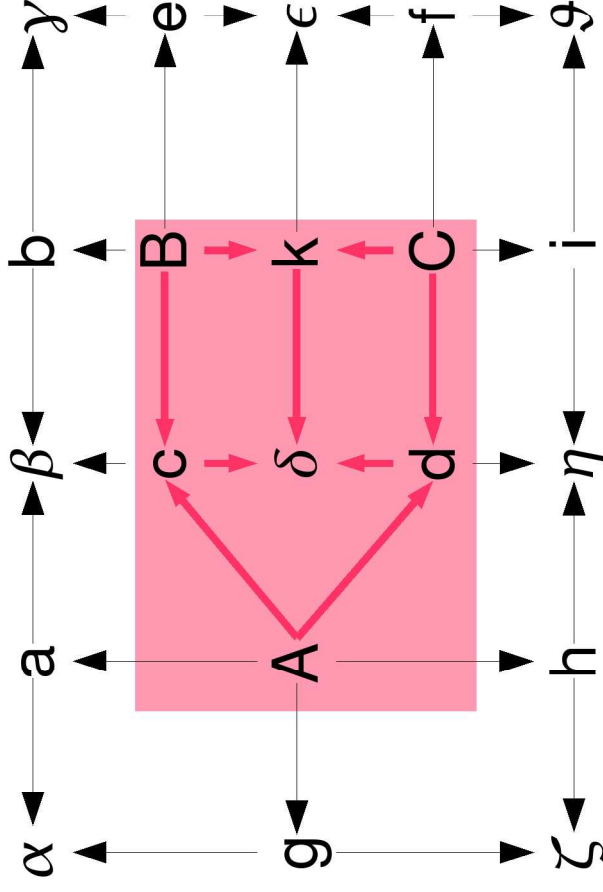
A	B	C
a	x	
b	x	x
c	x	
d		x
e		x
f		
g	x	
h	x	
i		x
k		x

a	b	c	d	e	f	g	h	i	k
alpha	x								
beta	x	x							
gamma		x		x					x
delta			x						x
epsilon				x	x				
zeta						x			
eta							x	x	
theta					x				

A → a
A → c
A → d
A → g
A → h
A → b
B → c
B → e
B → k
C → d
C → f
C → i
C → k
a → alpha
a → beta
b → beta
b → gamma
c → beta
c → delta
d → delta
d → eta
e → gamma
e → epsilon
f → gamma
f → theta
g → alpha
g → zeta
h → zeta
h → eta
i → eta
i → theta
k → delta
k → epsilon

Offene Mengen in $\mathcal{D}Top$

Charakteristik:
Kein Pfeil geht
von aussen in die
Menge hinein.



	A	B	C
a	x		
b	x	x	
c	x		x
d		x	
e			x
f			
g	x		
h	x		
i			x
k			x

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k
alpha	x									
beta	x	x								
gamma		x			x					
delta			x							x
epsilon				x						x
zeta						x				
eta							x			
theta								x		

Topologische Datenbanken

- A → a
- A → c
- A → d
- A → g
- A → h
- A → b
- B → c
- B → e
- B → k
- B → d
- C → f
- C → i
- C → k
- a → alpha
- a → beta
- b → beta
- b → gamma
- c → beta
- c → delta
- d → delta
- d → eta
- e → gamma
- e → epsilon
- f → gamma
- f → alpha
- g → zeta
- g → zeta
- h → eta
- h → eta
- i → gamma
- i → theta
- k → delta
- k → epsilon

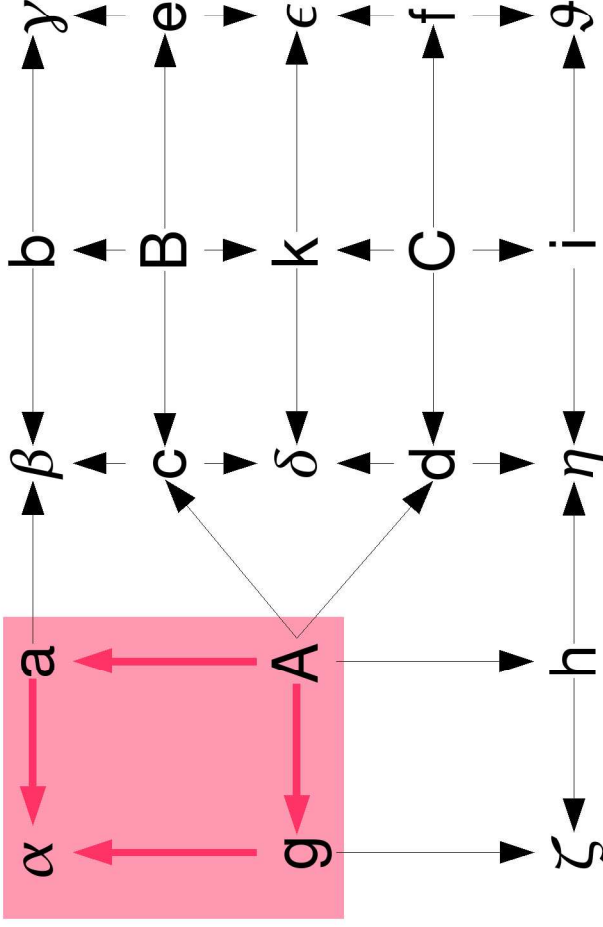
Norbert Paul + Patrick Erik Bradley



ifib
Institut für Industrielle Bauproduktion
Prof. Dr. N. Kohler
Universität Karlsruhe (TH)

Offene Mengen in $\mathcal{D}Top$

Charakteristik:
Kein Pfeil geht
von aussen in die
Menge hinein.



	A	B	C
a	x		
b	x	x	
c	x		x
d			
e			x
f			
g	x		
h	x		
i			x
k			x

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k
alpha	x									
beta	x	x								
gamma		x								
delta			x							
epsilon				x						
zeta						x				
eta							x			
theta								x		

Topologische Datenbanken

A	→	a
A	→	c
A	→	d
A	→	g
A	→	h
A	→	b
B	→	c
B	→	e
B	→	k
B	→	d
C	→	f
C	→	i
C	→	k
a	→	alpha
a	→	beta
b	→	beta
b	→	gamma
c	→	beta
c	→	delta
d	→	delta
d	→	eta
e	→	gamma
e	→	epsilon
f	→	epsilon
f	→	theta
g	→	alpha
g	→	zeta
h	→	zeta
h	→	eta
i	→	eta
i	→	theta
k	→	delta
k	→	epsilon

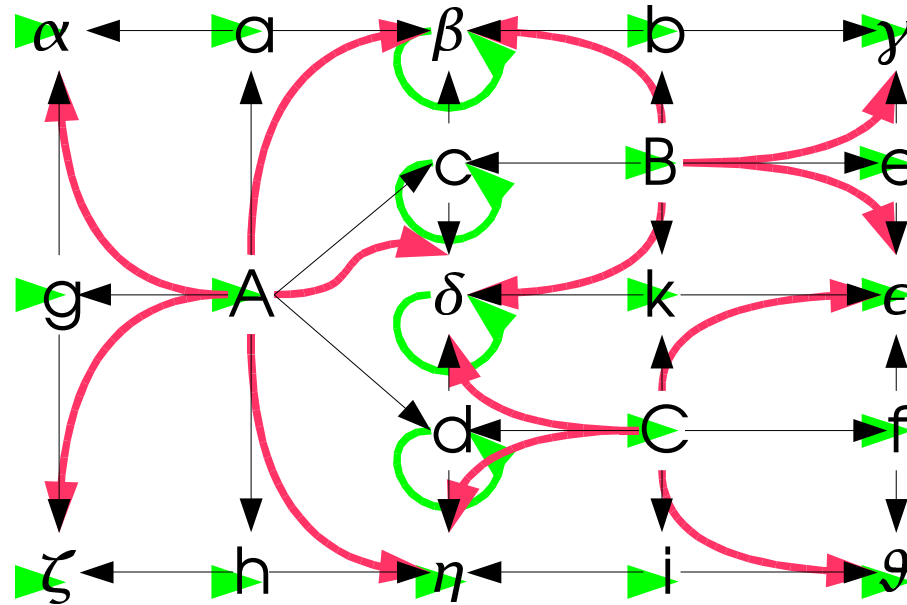
Norbert Paul + Patrick Erik Bradley

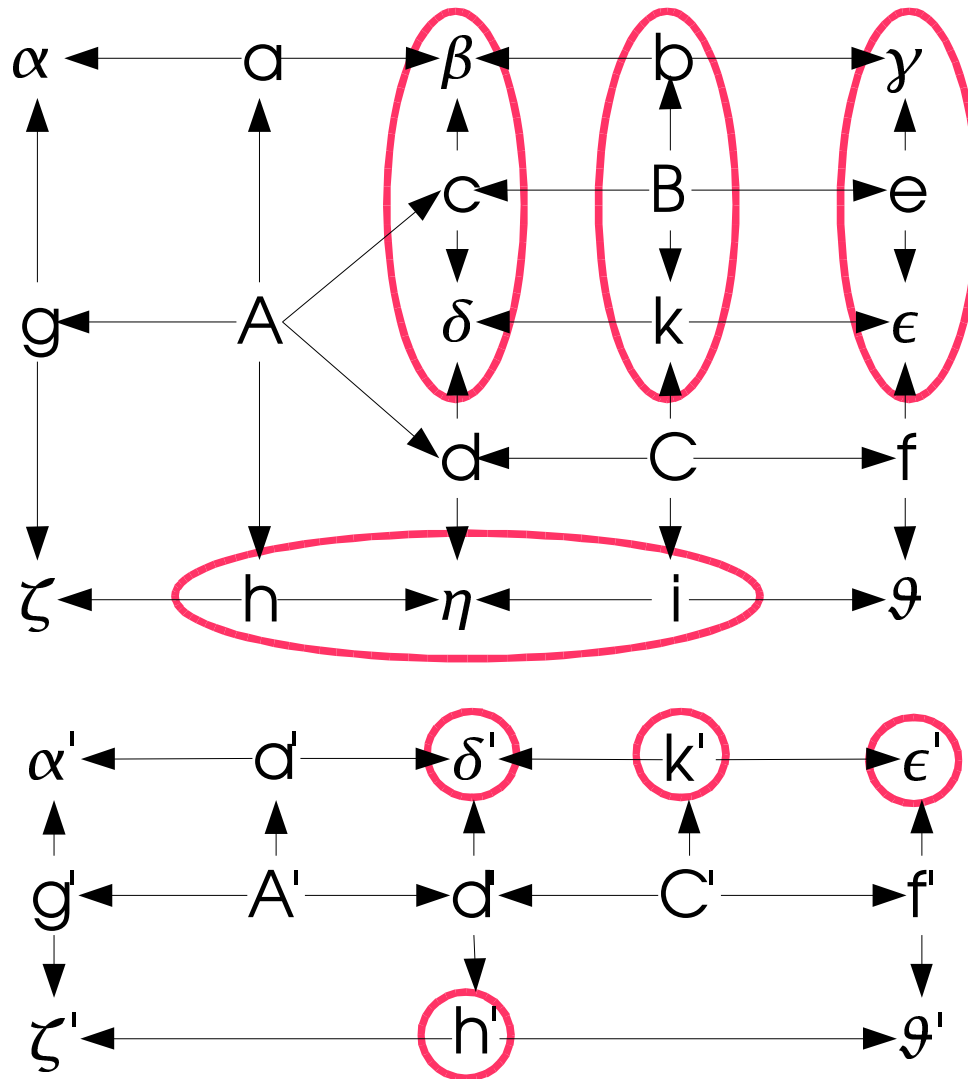


Transitive und reflexive Hülle einer Relation:

$$R^* = R^0 \cup R^+ =$$

Fügt man der transitiven Hülle noch für jeden Knoten a die Schleife $a \rightarrow a$ hinzu, spricht man von der transitiven und reflexiven Hülle R^*





Beispiel:
f: Werkplan \rightarrow Entwurfsplan

f

Stetigkeitskriterium:
 $f: (X, \mathcal{T}_R) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_S)$
 genau dann stetig in Top , wenn
 $a R b \Rightarrow f(a) S^* f(b)$
 also
 $(f \circ f)(R) \subseteq S^*$

- Satz:

Eine Abfragesprache, welche Stetigkeit in $DTop$ entscheiden kann, kann für ein beliebiges Paar $(a,b) \in X^2$ entscheiden, ob es in der transitive Hülle R^+ einer Relation $R \subseteq X^2$ liegt.

- Beweis:

Erzeuge aus (a,b) die Menge $Y := \{a,b\}$ und die Relation $S := \{(a,b)\}$.

Teste, ob die Injektion $i : (Y, S) \rightarrow (X, R)$ stetig ist.

Genau dann gilt $S \subseteq R^*$ und somit $(a,b) \in R^*$.

Also kann $a R^* b$ entschieden werden.

Dann auch $a R^+ b$ mit $(a \neq b \vee a R b) \wedge (a = b \vee a R^* b)$.

- Folgerung:

Für viele Abfragen topologischer Eigenschaften ist die Berechnung der transitiven Hülle notwendig.

Z.B. durch **start with ... join by ...** - Abfragen in Oracle-SQL.

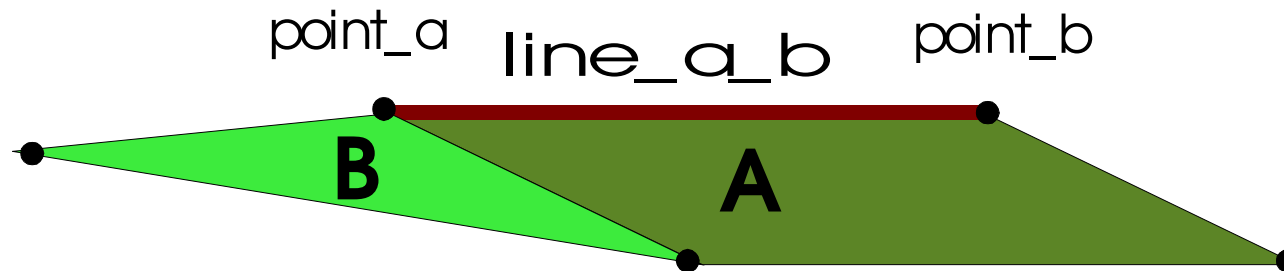
- Ausgangslage: Eine Familie von verschiedenen Polygon-„topologien“ einer Region zu jeweils verschiedenen Zeiten:
 - Zwei benachbarte Grundstücke A und B werden zusammengefasst.
 - Dabei wird A vergrößert und B verschwindet.
 - Ziel: Speichern dieses Ablaufs so dass
 - die für jeden Zeitpunkt geltenden Polygone abgefragt werden können
 - unveränderte Objekte nicht redundant gespeichert werden
 - die Identität von Objekt A trotz veränderter Geometrie erhalten bleibt

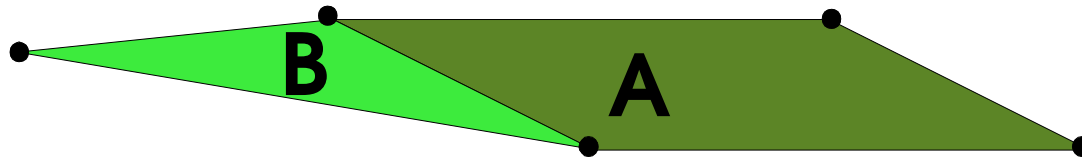
Tabelle CELL

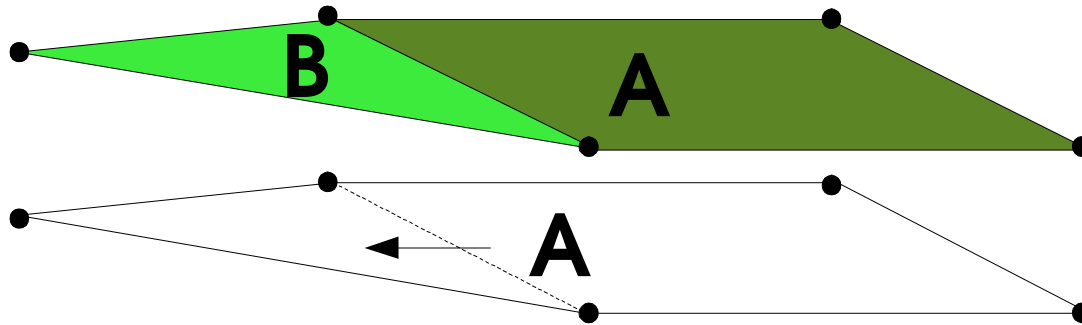
ID	dim
line_a_b	1
point_b	0
point_a	0

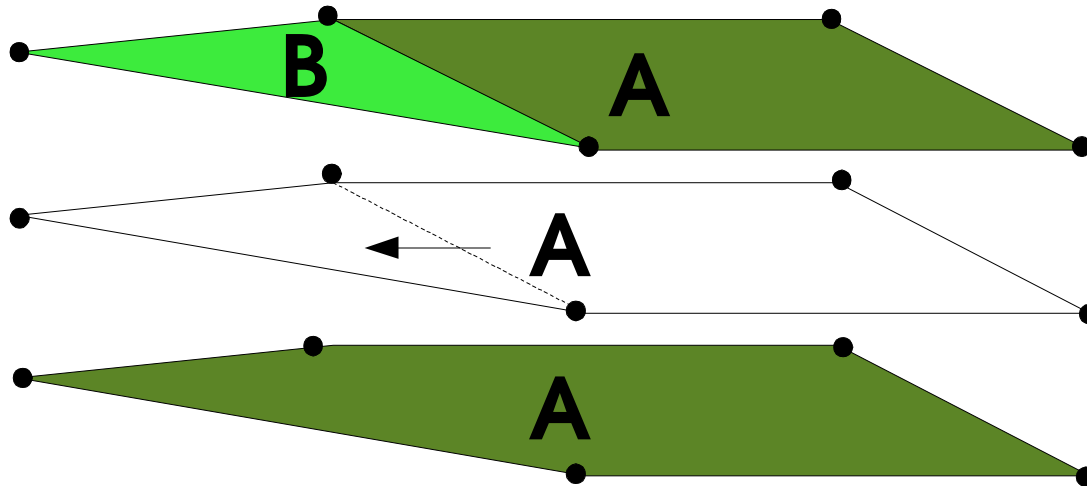
Tabelle BOUNDARY

X	dimX	Y	dimY
line_a_b	1	point_b	0
line_a_b	1	point_a	0

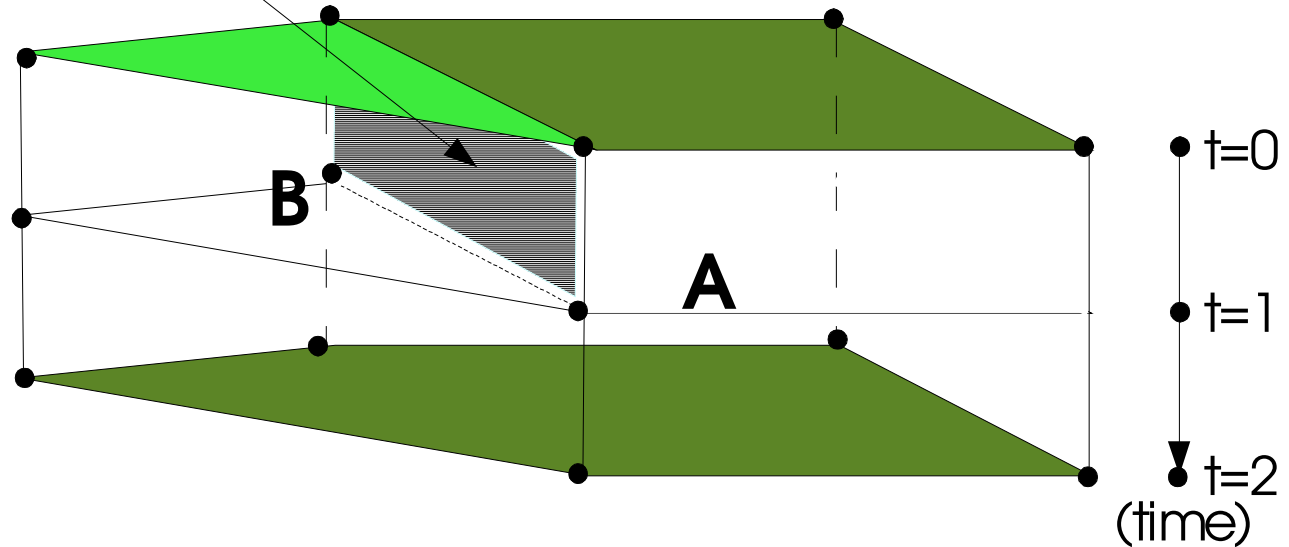








gemeinsame
Grenze von $t=0$ bis
 $t=1$



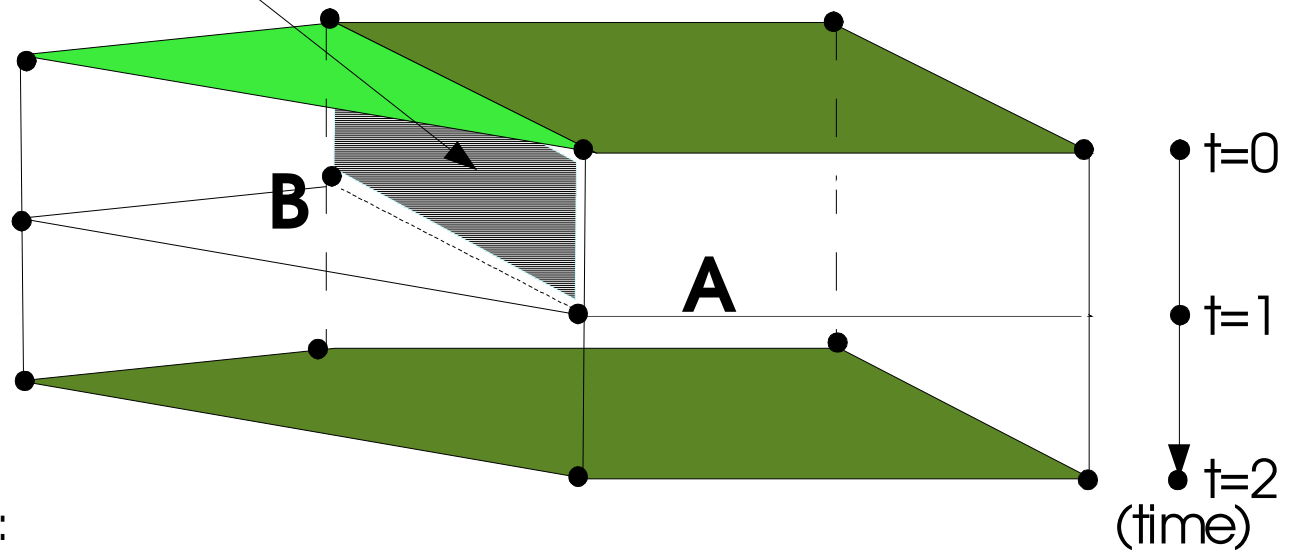
∂ ∂ ∂
Volumen \rightarrow Flächen \rightarrow Kanten \rightarrow Knoten

Norbert Paul + Patrick Erik Bradley

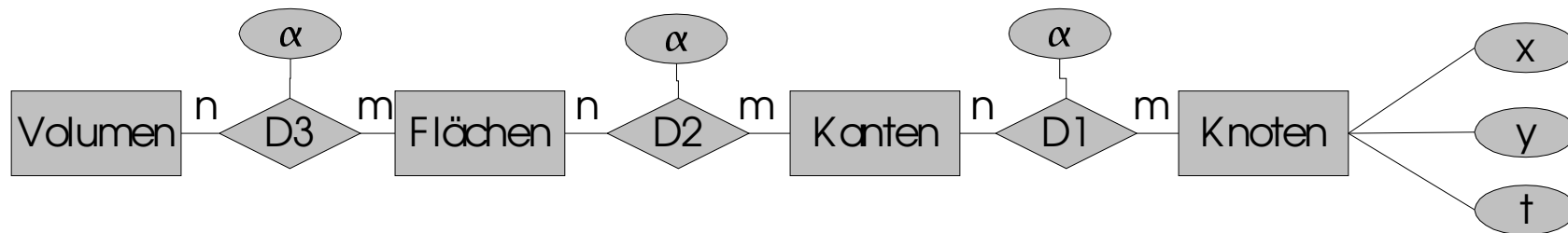
ifib Institut für Industrielle Bauproduktion
Prof. Dr. N. Kohler
Universität Karlsruhe (TH)



gemeinsame
Grenze von $t=0$ bis
 $t=1$

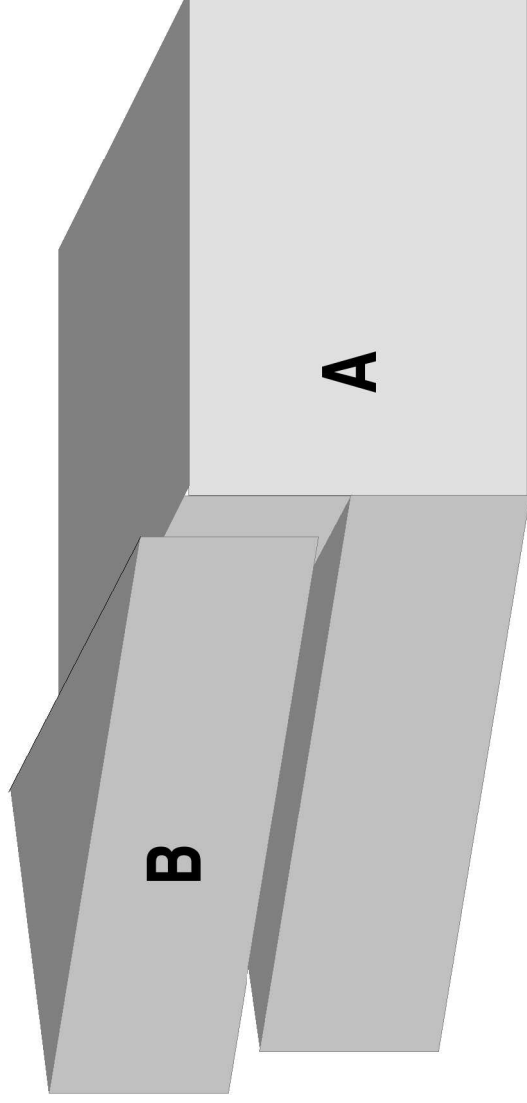


Kettenkomplex:



Volumen (= Fläche x Zeitintervall)

Topologische Datenbanken



Norbert Paul + Patrick Erik Bradley



ifib

Institut für Industrielle Bauproduktion
Prof. Dr. N. Kohler
Universität Karlsruhe (TH)

Flächen (Fläche x Zeitpunkt bzw. Kante x Zeitintervall)

Topologische Datenbanken



Norbert Paul + Patrick Erik Bradley

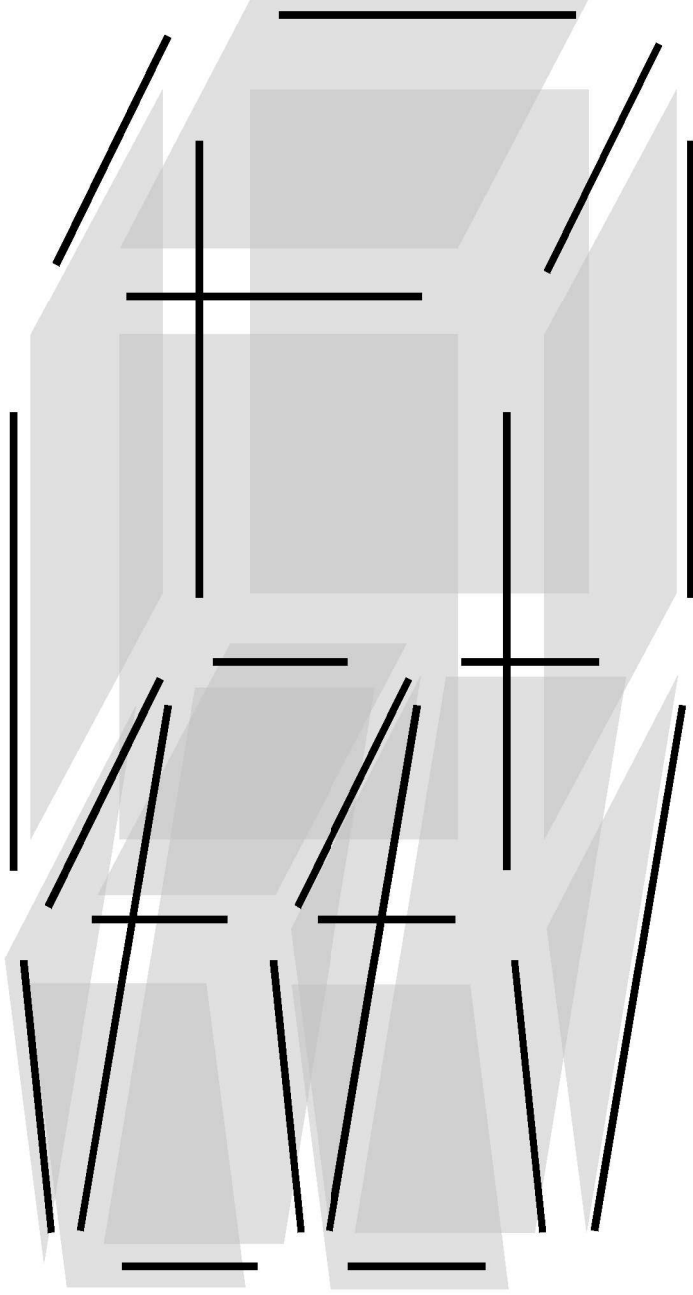


ifib

Institut für Industrielle Bauproduktion
Prof. Dr. N. Kohler
Universität Karlsruhe (TH)

Linien (Linie x Zeitpunkt bzw Eckpunkt x Zeitintervall)

Topologische Datenbanken

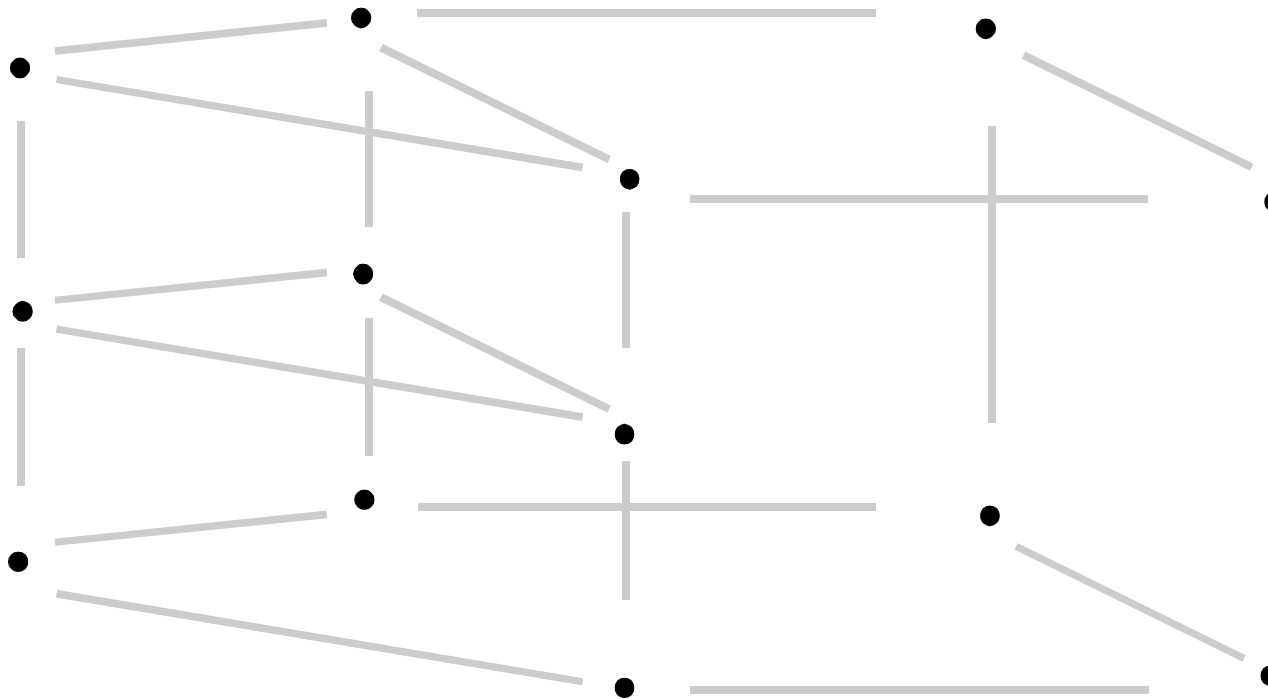


Norbert Paul + Patrick Erik Bradley



ifib

Institut für Industrielle Bauproduktion
Prof. Dr. N. Kohler
Universität Karlsruhe (TH)

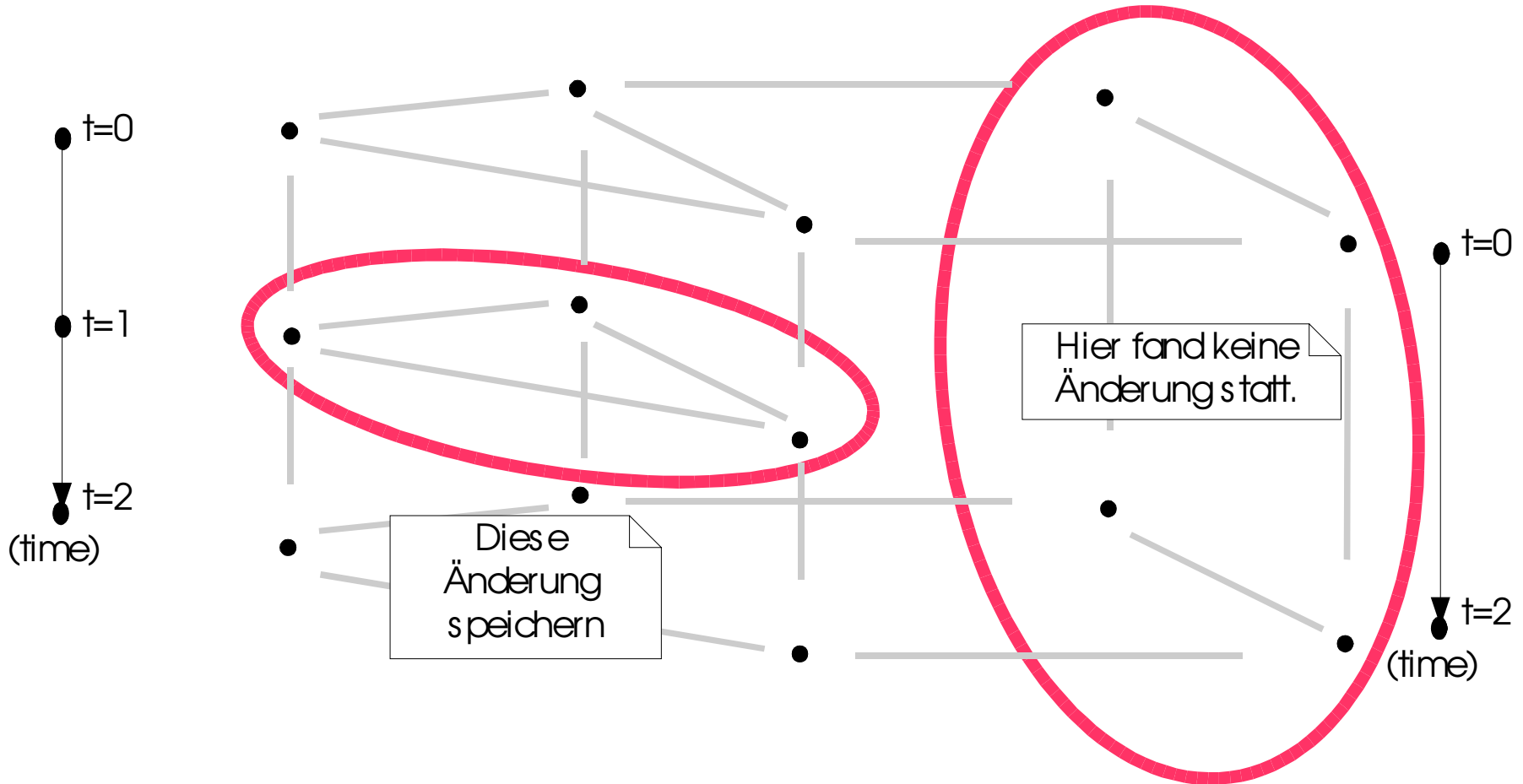


Norbert Paul + Patrick Erik Bradley

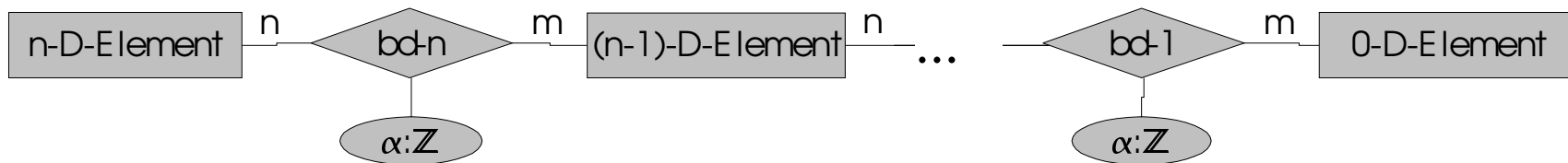
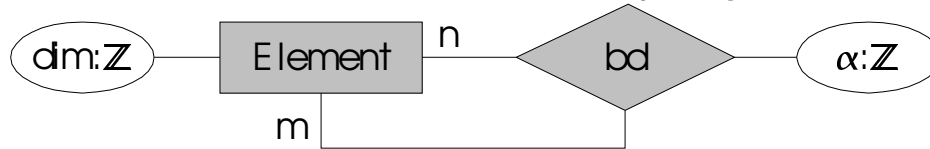
ifib

Institut für Industrielle Bauproduktion
Prof. Dr. N. Kohler
Universität Karlsruhe (TH)

Nur Veränderung speichern und Redundanz vermeiden



- Einfache Datenbankschemata für alle topologischen Informationen:



- statisches Datenbankschema bei beliebiger dynamischer Dimension
 - Folge: Auch 37-D-Topolgien sind kein Problem
- Einzige Voraussetzungen
 - Endliche Anzahl von Elementen
 - transitive Hülle, falls die Dimension nicht beschränkt wird.
- Topologische Eigenschaften DIME, QuadView, IfcTopologyResources, etc. sind immer auf *DTop* oder *DKetKomp* reduzierbar.
- Geeignet als formale Grundlage zur Integration von GIS und Gebäudemodellen.

Bereits 1937 war der Zusammenhang Toplogie und Relation bekannt:

2. Der Inhalt des Begriffes «diskreter Raum» wird vom allgemein-mengentheoretischen Standpunkt aus durch folgenden Satz klargemacht:

1. Ein diskreter T_0 -Raum D wird zu einer teilweise geordneten Menge, wenn man für je zwei Punkte p und p' von D dann und nur dann

$$p' < p \quad (1)$$

setzt, wenn

$$p' \in \overline{p} \quad (2)$$

ist. Umgekehrt lässt sich jede teilweise geordnete Menge D als ein diskreter T_0 -Raum auffassen: man setzt (2), wenn entweder $p' = p$ oder (1) gilt, und definiert für jede nicht leere Teilmenge M von D die abgeschlossene Hülle als Summe der abgeschlossenen Hüllen der einzelnen Punkte von M , während für die leere Menge 0 definitionsgemäss $\overline{0} = 0$ gesetzt wird.

Anmerkungen:

Zum Begriff: Diese «diskreten Räume» heißen heute «Alexandroff-Räume»

Zu (1): In **DTop** sagen wir $p R^* p'$ statt $p' < p$.

R^{*T} bzw. „<“ heißt in der englischen Literatur oft „specialization preorder“.